

ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221
2004 №4

КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ





Поленница

Эта игрушка была показана на всемирном съезде любителей головоломок в Лондоне в 1999 году. Ее привез из Германии изобретатель **Жан-Клод Константин**.

Для того чтобы сделать головоломку, вам понадобятся 25 кубиков и 8 брусков квадратного сечения. Размер стороны поперечного сечения бруска в два раза меньше, чем размер ребра кубика; длина бруска в семь раз больше ребра кубика. Кубики нужно приклеить к брускам так, как показано на рисунке, при этом один кубик у вас останется. Теперь можно приступать к решению головоломки. Уложите один ряд из четырех брусков поверх другого ряда так, чтобы получилась ровная, без выступов

поленница. Одна ячейка этой поленницы окажется пустой. Туда и нужно заложить последний кубик. Легко догадаться, что совсем не обязательно приклеивать кубики к брускам. Можно сначала собрать поленницу из отдельных кубиков и брусков, а уже затем склеивать их друг с другом. Тогда вы получите свою оригинальную головоломку, возможно более интересную и трудную в решении, чем игрушка из Лондона, показанная на фотографии.

А.Калинин



В номере:



Учредители — Президиум Российской академии наук, Фонд поддержки фундаментальной науки и образования (Фонд Осипьяна)

главный редактор

Ю.А.Осипьян

первые заместители
главного редактора

С.С.Кротов, С.П.Новиков

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.Я.Белов, Ю.М.Брук, А.А.Варламов,
А.Н.Виленкин, С.А.Гордюнин,
Н.П.Долбиллин, В.Н.Дубровский, А.А.Егоров,
А.Р.Зильберман, В.В.Козлов,
С.П.Коновалов, А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,
В.В.Можаяев, В.В.Произволов, Н.Х.Розов,
А.Б.Сосинский, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,

А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд, М.И.Башмаков,
В.И.Берник, В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
1970 ГОДА

главный редактор

И.К.Кикоин

первый заместитель
главного редактора

А.Н.Колмогоров

Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков,
В.Г.Болтянский, И.Н.Бронштейн,
Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург, В.Г.Зубов,
П.Л.Капица, В.А.Кириллин, Г.И.Косоуров,
В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,
А.И.Маркушевич, М.Д.Миллиончиков,
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов,
А.П.Савин, И.Ш.Слободецкий,
М.Л.Смолянский, Я.А.Сморodinский,
В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер

Бюро  Квантум

©2004, Президиум РАН,
Фонд Осипьяна, «Квант»

2 Автостоянки, перестановки и деревья. Ю.Бурман, А.Спивак
12 Звук в пене. А.Стасенко

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

15 Итальянцы эпохи Возрождения. А.Васильев

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

17 Катушка, вращающаяся в магнитном поле. В.Майер,
Р.Майер

К М Ш

19 Задачи
20 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
20 Опыты с пластиковыми бутылками. Р.Даминов

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

23 Победители конкурса «Задачник «Кванта» 2003 года
24 Задачи М1916–М1920, Ф1923–Ф1927
25 Решения задач М1891–М1900, Ф1908–Ф1912

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

30 Ряды

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

34 «Досье» на окружность Аполлония. Г.Филипповский

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

38 Магнитный поток сверхпроводника. М.Лившиц

ИНФОРМАЦИЯ

40 Школьные Харитоновские чтения

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

42 Соотношения между средними величинами. Л.Шибасов

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

47 Магнитное поле. В.Можаяев

ОЛИМПИАДЫ

52 LXXVII Московская математическая олимпиада
54 Избранные задачи Московской физической олимпиады
58 Ответы, указания, решения
Нам пишут (11, 15, 51)

НА ОБЛОЖКЕ

- I Иллюстрация к статье «Звук в пене»
- II Коллекция головоломок
- III Шахматная страничка
- IV Физики и математики на монетах мира



Автостоянки, перестановки и деревья

Ю. БУРМАН, А. СПИВАК

НА АВТОМОБИЛЬНЫХ СТОЯНКАХ ОБЫЧНО НЕ сажают деревья – они мешали бы маневрировать машинам. (Обычно, но не всегда: посреди стоянки Независимого московского университета, в котором работает первый автор этой статьи, растет большой дуб...) Конечно, не это послужило поводом для рассказа об очередях, перестановках, числах Каталана и деревьях с пронумерованными вершинами. Но вот что получилось.

Бесконфликтные очереди

Автомобильная стоянка представляет собой ряд из n стояночных мест, занумерованных от 1 до n . Въехав на стоянку, автомобиль может двигаться только вперед. На въезде скопилась очередь из n машин. Заезжают на стоянку они одна за другой. Каждый водитель вначале подъезжает к своему любимому месту. Если оно свободно – ставит туда машину, а если занято, то едет вперед до ближайшего свободного места (если такое есть!). Например, если водители машин a, b, c, d, e и f желают встать на места с номерами 3, 4, 3, 2, 6 и 6

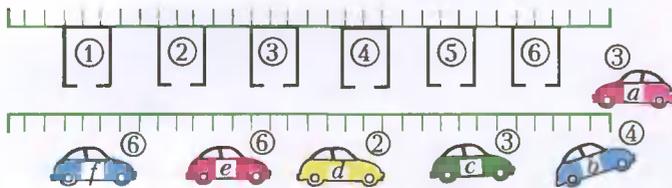


Рис. 1

(рис. 1), то сначала a и b встанут на третье и четвертое места соответственно, затем c встанет на второе место, d – на первое, e – на шестое, наконец, f – на пятое (рис. 2).



Рис. 2

Обозначим через a_1, a_2, \dots, a_n номера любимых мест первой, второй, ..., n -й машин очереди. Числа a_1, a_2, \dots, a_n натуральные и не превосходят n . Водители не договариваются между собой о том, у кого какие места любимые. Это может привести к тому, что очередной водитель обнаружит свое любимое место занятым, а впереди свободных мест уже не останется. Например, если $a_1 = a_2 = 1$, то это случится уже со второй в очереди машиной. Если последовательность a_1, a_2, \dots, a_n такова, что все машины успешно встают на стоянку, то будем называть ее *бесконфликтной очередью*.

Интересно, сколько существует бесконфликтных очередей из n машин? При $n = 2$ таких очередей три: (1, 2), (2, 1) и (2, 2); четвертая возможная очередь – (1, 1) – приводит к конфликту. При $n = 3$ допустимых очередей, как легко проверить, 16 штук:

1, 2, 3
1, 3, 2
2, 1, 3
2, 3, 1 1, 3, 3 2, 2, 3 2, 3, 3
3, 1, 2 3, 1, 3 2, 3, 2 3, 2, 3
3, 2, 1 3, 3, 1 3, 2, 2 3, 3, 2 3, 3, 3

Теорема 1. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n является бесконфликтной очередью тогда и только тогда, когда ни один ее член не превосходит n и когда для любого натурального k , где $k < n$, количество членов последовательности, не превосходящих k , не превосходит k .

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно: если более чем k водителей желают поставить свои машины на первые k мест, то конфликта не избежать. Докажем обратное. Пусть в момент, когда возник конфликт, машины занимают сплошь первые k мест, а $(k + 1)$ -е место свободно. Машины, которые заняли первые k мест, первоначально претендовали на места с номерами, меньшими или равными k (иначе кто мешал им занять $(k + 1)$ -е место?). Очередная («создающая конфликт») машина тоже претендует на одно из первых k мест – следовательно, таких машин по крайней мере $k + 1$, что и требовалось доказать.

Мы решили задачу M1885, а) «Задачника «Кванта».

Следствие. Конфликтна очередь или нет, не зависит от того, в каком порядке выписаны ее члены.

Упражнение 1. Последовательность целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n является бесконфликтной очередью тогда и только тогда, когда ни один из ее членов не превосходит n и для любого числа k количество тех членов, которые больше k , не меньше $n - k$. Докажите это.

Кольцевая стоянка

Добавим к стоянке еще одно, нулевое место и «закольцуем» ее, погасив тем самым все конфликты – теперь всякая очередь из n

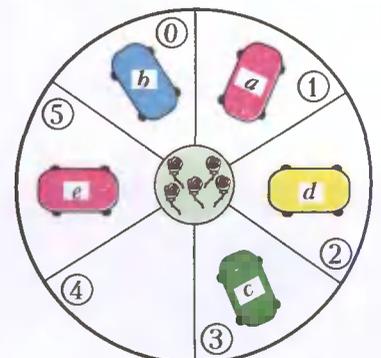


Рис. 3

машин сможет разместиться на стоянке, причем одно место останется свободным. Например, для последовательности 1, 1, 3, 2, 3 останется свободным место номер 4 (рис.3). Для любой последовательности целых неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_n , ни одно из которых не превосходит n , обозначим через $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ номер места, остающегося свободным.

Теорема 2. Последовательность является бесконфликтной очередью тогда и только тогда, когда $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$.

Доказательство. Если последовательность является бесконфликтной очередью, то на кольцевой стоянке машины займут те же самые места, что и на обычной стоянке, а нулевое место останется свободным.

Обратно, пусть $F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$. Тогда ни одна машина не проехала мимо нулевого места (иначе она встала бы на это место), так что «закольцованность» стоянки по сути не была использована и машины можно без конфликта поставить на незакольцованную стоянку длины n .

Следствие. Количество бесконфликтных очередей из n машин равно $(n+1)^{n-1}$.

Доказательство. Количество всевозможных последовательностей целых неотрицательных чисел a_1, a_2, \dots, a_n , элементы которых не превосходят n , равно $(n+1)^n$.¹ Для каждой из этих последовательностей есть свое число $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Поскольку числа 0, 1, 2, ..., n расположены по кругу, ни одно из них не занимает привилегированного положения: при помощи поворота можно любое из этих $n+1$ чисел перевести в любое другое. Значит, доля бесконфликтных очередей среди всех $(n+1)^n$ рассматриваемых последовательностей равна $1/(n+1)$, т.е. бесконфликтных очередей ровно $(n+1)^{n-1}$ штук!

Мы решили задачу M1885, б).

Упражнение 2. Докажите, что величина F зависит только от набора любимых мест, но не от порядка, в котором машины заезжают на стоянку.

Теперь на некоторое время позабудем об автостоянках, а займемся перестановками и деревьями. Эти совершенно разные на первый взгляд сюжеты теснейшим и весьма красивым образом взаимосвязаны.

Перестановки

Перестановка первых n натуральных чисел – это взаимно однозначное отображение² множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя.

¹ Это одно из основных правил комбинаторики – правило произведения. Если оно вам никогда не встречалось, можете почитать статью А.Левина «Что такое комбинаторика» («Квант» №5 и №6 за 1999 год), статью Н.Васильева и А.Спивака «Посчитаем вероятность» («Квант» №4 за 1997 год) или книгу Н.Виленкина «Популярная комбинаторика».

² Отображение f множества A в B называют взаимно однозначным соответствием, если каждому элементу a множества A соответствует некоторый элемент $f(a)$ множества B , причем для каждого элемента b множества B найдется такой элемент $a \in A$, и притом единственный, что $b = f(a)$.

Словосочетание «взаимно однозначное отображение» встречается в математике настолько часто, что придуман короткий синоним: «биекция».

Например, вот одна из перестановок ($n = 9$):

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	9	4	7	8	1	3	2	6

Нетрудно посчитать общее количество перестановок, которые можно составить из n элементов, т.е. количество способов, которыми можно все эти элементы расположить в ряд. Так, для $n = 3$ это количество равно 6:

1	2	3
↓	↓	↓
1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

Для $n = 4$ оно равно 24:

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	2	1	3	4	3	1	2	4	4	1	2	3
1	2	4	3	2	1	4	3	3	1	4	2	4	1	3	2
1	3	2	4	2	3	1	4	3	2	1	4	4	2	1	3
1	3	4	2	2	3	4	1	3	2	4	1	4	2	3	1
1	4	2	3	2	4	1	3	3	4	1	2	4	3	1	2
1	4	3	2	2	4	3	1	3	4	2	1	4	3	2	1

В общем случае оно равно

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

В самом деле, если нам нужно расположить в строку первые n натуральных чисел, то сначала нужно выбрать одно из n данных чисел, затем одно из $(n-1)$ оставшихся, после этого выбирать придется из $(n-2)$ вариантов, и так далее вплоть до выбора предпоследнего числа из двух оставшихся к этому моменту (а последнее, n -е число определено однозначно).

Упражнения

3. Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_n является бесконфликтной очередью тогда и только тогда, когда существует такая перестановка $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ первых n натуральных чисел, что $a_1 \geq \sigma(1)$, $a_2 \geq \sigma(2)$, ..., $a_n \geq \sigma(n)$. Докажите это.

4. Мы перечисляли перестановки в словарном порядке, начиная с $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$ и заканчивая $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$. Найдите

перестановку, непосредственно следующую в таком перечислении за перестановкой а) $\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$;

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	9	4	7	8	1	3	2	6

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	9	3	5	8	7	6	4	1

Правильные последовательности

Определение. Последовательность b_1, b_2, \dots, b_n натуральных чисел *правильная*, если $b_1 \leq n$, $b_2 \leq n - 1$, ..., $b_k \leq n - k + 1$, ..., $b_n \leq 1$.

Поскольку b_1 мы можем выбирать из n вариантов, b_2 – из $n - 1$ вариантов, ..., b_{n-1} – из двух вариантов, а $b_n = 1$, то по правилу произведения существует $n!$ правильных последовательностей – столько же, сколько и перестановок. Но это не самое интересное. Оказывается, существует естественное взаимно однозначное соответствие между перестановками и правильными последовательностями!

Рассмотрим следующую таблицу правильных последовательностей:

1	1	1
1	2	1
2	1	1
2	2	1
3	1	1
3	2	1

Не понимаете, как это связано с таблицей перестановок из 3 элементов? Тогда полюбуйтесь на правильные последовательности длины 4:

1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	4	1	1	1
1	1	2	1	2	1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1
1	2	1	1	2	2	1	1	3	2	1	1	4	2	1	1
1	2	2	1	2	2	2	1	3	2	2	1	4	2	2	1
1	3	1	1	2	3	1	1	3	3	1	1	4	2	1	1
1	3	2	1	2	3	2	1	3	3	2	1	4	2	2	1

Вы все еще не догадались, как по перестановке построить правильную последовательность, а по правильной последовательности – перестановку? Что ж, объясним, как это соответствие устроено.

Рассмотрим перестановку

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	9	4	7	8	1	3	2	6

и построим соответствующую ей правильную последовательность. Разумно взять $b_1 = 5$.

Хотелось бы «отрезать» первый столбец и применить ту же процедуру к оставшимся столбцам, но так наивно поступать нельзя: получится не перестановка, поскольку в верхней и нижней строках будут разные наборы чисел. Однако можно осуществить естественную перенумерацию, уменьшив все числа верхней строки на 1, а в нижней строке оставив без изменения числа от 1 до 4 и уменьшив на 1 числа от 6 до 8:

1	2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
8	4	6	7	1	3	2	5

Теперь разумно взять $b_2 = 8$. После отрезания левого

столбца и перенумерации имеем

1	2	3	4	5	6	7
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
4	6	7	1	3	2	5

Значит, $b_3 = 4$. Далее получаем (проверьте!) $b_4 = 5$, $b_5 = 5$, $b_6 = 1$, $b_7 = 2$, $b_8 = 1$ и $b_9 = 1$.

Аналогичным образом можно действовать и для произвольной перестановки. Очевидно, такое соответствие между перестановками и правильными последовательностями является взаимно однозначным.

Упражнения

5. Постройте правильные последовательности, соответствующие перестановкам

1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9
а) ↓	↓	↓	↓	б) ↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
4	1	3	2	6	1	7	9	3	5	4	8	2

6. Постройте перестановки, соответствующие правильным последовательностям а) 1, 3, 1, 1; б) 9, 8, 7, 6, 3, 4, 3, 1, 1.

7. Сколько всего существует взаимно однозначных соответствий между множеством правильных последовательностей длины n и множеством перестановок первых n натуральных чисел?

Порядки и беспорядки

Рассмотрим любую перестановку σ и проведем стрелочки от каждого числа верхней ее строки к равному ему числу нижней строки (рис.4). Если какие-то две стрелочки пересекаются, то говорят, что соответствующие числа образуют беспорядок, и называют такую пару *инверсией*.

Упражнение 8. Количество инверсий перестановки σ равно количеству таких пар (i, j) , что $i < j$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Докажите это.

Например, тождественная перестановка, заданная формулой $\sigma(k) = k$, не имеет ни одной инверсии. Для перестановки, заданной формулой $\sigma(k) = n + 1 - k$, любая пара (i, j) , где $1 \leq i < j \leq n$, образует беспорядок; поэтому такая перестановка обладает $n(n - 1)/2$ инверсиями – максимально возможным их числом.

Интересно, сколько инверсий в той перестановке, которой соответствует правильная последовательность b_1, b_2, \dots, b_n ? Проанализировав соответствие между перестановками и правильными последовательностями, получаем ответ: $b_1 + b_2 + \dots + b_n - n$.

Упражнение 9. Проверьте этот ответ!

Производящая функция

В комбинаторике часто вместо последовательности a_0, a_1, \dots, a_n рассматривают ее *производящую функцию* – многочлен $a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$. Казалось бы, все равно – рассматривать последовательность или многочлен: ведь последовательность однозначно определяет многочлен, а многочлен – последовательность своих коэффициентов. Однако, по меткому выражению Д.Пойа (книгу которого «Математическое открытие» стоит прочитать каждому, кто интересуется математикой), использование производящих

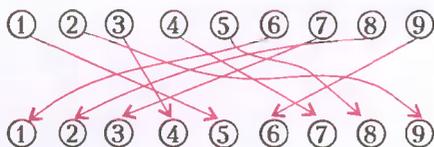


Рис.4. Эта перестановка имеет 23 инверсии. Ей соответствует правильная последовательность 5, 8, 4, 5, 5, 1, 2, 1, 1. Заметьте: $5 + 8 + 4 + 5 + 5 + 1 + 2 + 1 + 1 - 9 = 23$

функций удобно по той же причине, почему удобнее много мелких предметов переносить, сложив их в мешок, а не по отдельности. Сейчас мы в этом убедимся.

Теорема 3. Обозначим через I_k , где $0 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$, количество перестановок из n элементов, обладающих ровно k инверсиями. Рассмотрим производящую функцию этой последовательности, т.е. многочлен

$$f(x) = I_0 + I_1x + I_2x^2 + \dots + I_{n(n-1)/2}x^{n(n-1)/2}.$$

Тогда

$$f(x) = \prod_{r=1}^{n-1} (1 + x + \dots + x^r),$$

т.е. многочлен $f(x)$ равен произведению следующих $n-1$ множителей: $1 + x, 1 + x + x^2, \dots, 1 + x + \dots + x^{n-1}$.

Доказательство. При раскрытии скобок получается сумма одночленов вида $t^k = t^{a_1} \cdot t^{a_2} \cdot \dots \cdot t^{a_{n-1}}$, где сомножители выбраны, соответственно, из 1-й, 2-й, ..., $(n-1)$ -й скобки. Тем самым, $k = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$ и коэффициент при t^k многочлена $f(x)$ (возникающий после раскрытия скобок в правой части и приведения подобных слагаемых) равен количеству способов представить число k в виде суммы

$$k = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1},$$

где $0 \leq a_1 \leq 1, 0 \leq a_2 \leq 2, \dots, 0 \leq a_{n-1} \leq n-1$. Иными словами, числа $b_1 = a_{n-1} + 1, b_2 = a_{n-2} + 1, \dots, b_{n-1} = a_1 + 1, b_n = 1$ образуют правильную последовательность длины n , сумма членов которой равна

$$(a_{n-1} + 1) + (a_{n-2} + 1) + \dots + (a_1 + 1) + 1 = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_1 + n = k + n.$$

Таким образом, коэффициент равен количеству тех правильных последовательностей длины n , сумма членов которых равна $k + n$. А предыдущем разделе мы доказали, что это то же самое, что и количество перестановок с k инверсиями.

Упражнения

10. Сколько существует перестановок, обладающих

а) 1 инверсией; б) 2 инверсиями?

11. Докажите равенства

а) $I_k = I_{n(n-1)/2 - k}$; б) $f(x) = x^{n(n-1)/2} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Числа Каталана

Как вы помните, при перестановке машин из бесконфликтной очереди получается опять бесконфликтная очередь. А что если не различать очереди, получающиеся одна из другой перестановкой? Иными словами, мы хотим вместо последовательностей рассматривать наборы их значений; при этом важно, какое значение сколько раз встречается, но не важно, в каком порядке, так что последовательности (3,3,2) и (3,2,2) мы сейчас различаем, а последовательности (2,3,2) и (2,2,3) не различаем.

Поскольку любую последовательность можно при помощи перестановки превратить в неубывающую, то, вспомнив теорему 1, мы видим, что достаточно вычислить количество таких неубывающих последовательностей $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n$, что $k \leq a_k$ при $1 \leq k \leq n$. Для $n = 1$ такая последовательность единственна и состоит из числа 1. Для $n = 2$ — две последовательности: 12 и 22. Для $n = 3$ — пять штук: 123, 133, 223, 233 и 333. Для $n = 4$ — четырнадцать последовательностей: 1234, 1244, 1334, 1344, 1444, 2234, 2244, 2334, 2344, 2444, 3334, 3344, 3444 и 4444.

Читатель статьи «Числа Каталана» уже узнал эту последовательность (см. «Квант» №3). Но мы сумеем вывести явную формулу и без использования результатов той статьи. Для этого сначала узнаем, сколько существует неубывающих последовательностей $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n$, забыв про условие бесконфликтности.

Нам понадобится число сочетаний C_n^k — количество k -элементных подмножеств данного n -элементного множества, т.е. количество способов выбрать k предметов из n данных различных предметов, если важно только, какие предметы включены в группу, какие нет, а порядок выбора несуществен. Со свойствами чисел сочетаний можно познакомиться, например, по книге В.Успенского «Треугольник Паскаля». Особенно важна явная формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Очевидно, для задания набора чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, где $0 \leq a_0$ и $a_n \leq n$, достаточно указать, сколько в нем нулей, единиц, двоек, ..., вплоть до того, сколько чисел, равных n . Обозначив через b_k , где $0 \leq k \leq n$, количество чисел, равных k , получаем последовательность целых неотрицательных чисел b_0, b_1, \dots, b_n , причем

$$b_0 + b_1 + \dots + b_n = n.$$

Прибавив к каждому из чисел b_k по единице, получаем последовательность натуральных чисел $c_0, c_1, \dots, c_n = 2n + 1$, сумма которых равна

$$c_0 + c_1 + \dots + c_n = 2n + 1.$$

Сколько же таких последовательностей? Выложим в ряд $2n + 1$ яблоко. Задать последовательность c_0, c_1, \dots, c_n — то же самое, что положить n перегородок, разбивающих ряд яблок на $n + 1$ частей так, что в первой из них c_0 яблок, во второй — c_1, \dots , а в n -й — c_n яблок. Положить n перегородок на $2n$ имеющихся мест можно C_{2n}^n способами.

Есть и более простой способ получить этот ответ. А именно, рассмотрим вместо чисел a_1, a_2, \dots, a_n числа $d_1 = a_1 + 1, d_2 = a_2 + 2, \dots, d_n = a_n + n$. Нестрогие неравенства $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n$ превращаются в строгие:

$$0 < d_1 < d_2 < \dots < d_n < 2n + 1.$$

Таким образом, надо узнать, сколькими способами можно выбрать из первых $2n$ натуральных чисел числа $d_1 < d_2 < \dots < d_n$. По определению чисел сочетаний, это можно сделать C_{2n}^n способами.

Теперь мы готовы ответить на вопрос о количестве таких неубывающих последовательностей $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq n$, что $k \leq a_k$ при $1 \leq k \leq n$. Рассмотрим сначала всевозможные неубывающие последовательности (a_1, a_2, \dots, a_n) , где $0 \leq a_k \leq n$. Ранее мы сопоставили каждой такой последовательности число $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – номер места, которое останется свободным, если расставлять машины с «любимыми местами» a_1, a_2, \dots, a_n на кольцевой стоянке. При этом $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ зависит только от набора значений последовательности (a_1, a_2, \dots, a_n) и не зависит от их порядка. Поскольку на циклической автостоянке числа от 0 до n равноправны, то нужно всего лишь разделить число C_{2n}^n на $n + 1$. Получаем в точности число Каталана:

$$\frac{1}{n+1} C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!}.$$

Например, при $n = 3$ получаем, как и положено, $\frac{1}{4} C_6^3 = \frac{6!}{4! \cdot 3!} = 5$ вариантов, а при $n = 4$ получаем $\frac{1}{5} C_8^4 = \frac{8!}{5! \cdot 4!} = 14$ вариантов.

Мы решили задачу M1885,в).

Деревья

Автостоянки и перестановки мы уже обсудили. Пора заняться деревьями. Для математика дерево – это связный граф без циклов. Неформально говоря, *граф* – это набор точек (вершин), некоторые из которых соединены линиями (ребрами). При этом важно, сколько

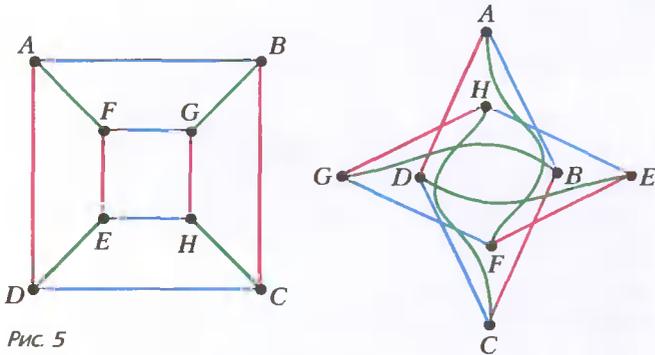


Рис. 5

имеется вершин и какие именно из них соединены ребрами, а какие нет, но не имеет значения, где именно расположены вершины, какую форму имеют ребра, пересекаются они или нет и т.п. Например, на рисунке 5 дважды изображен один и тот же граф.

Граф удобно представлять себе как карту дорог: вершины – города, а ребра – дороги, ведущие из города в город. Граф называют *связным*, если из любой вершины можно попасть в любую другую, двигаясь по ребрам. *Циклом* называют замкнутый путь, идущий по ребрам, который ни по одному ребру не проходит два раза. Проверьте: на рисунке 6 первый и третий графы – связные, а второй и четвертый – нет; первый и второй графы обладают циклами, а графы третий и четвертый – нет; деревом является только третий граф.

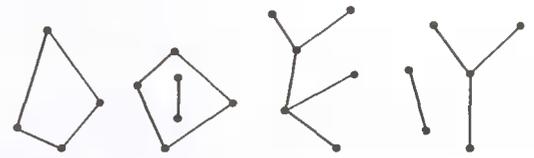


Рис. 6

Интересно, сколько существует различных деревьев с $n + 1$ вершинами?³ Прежде чем отвечать на этот вопрос, его следует уточнить. Сколько деревьев изображено на рисунке 7? Ответ зависит от того, учитываем ли мы номера вершин. Если учитываем, то все три

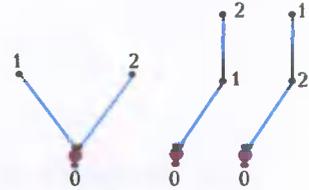


Рис. 7

дерева различны; если же нет, но корень выделен, то деревьев – два; если даже корень не выделен, то – одно дерево.

Так вот, мы всегда будем рассматривать деревья с вершинами, занумерованными числами от 0 до n . Удивительным образом ответ такой же, как в задаче про бесконфликтные последовательности: $(n + 1)^{n-1}$. Вскоре мы это докажем, а пока рассмотрим примеры.

Для $n = 2$ все 3 дерева изображены на рисунке 7, а для $n = 3$ все 16 деревьев – на рисунке 8. Чтобы не запутаться, корень – вершину номер 0 – мы изображаем ниже всех. Вершины, непосредственно соединенные

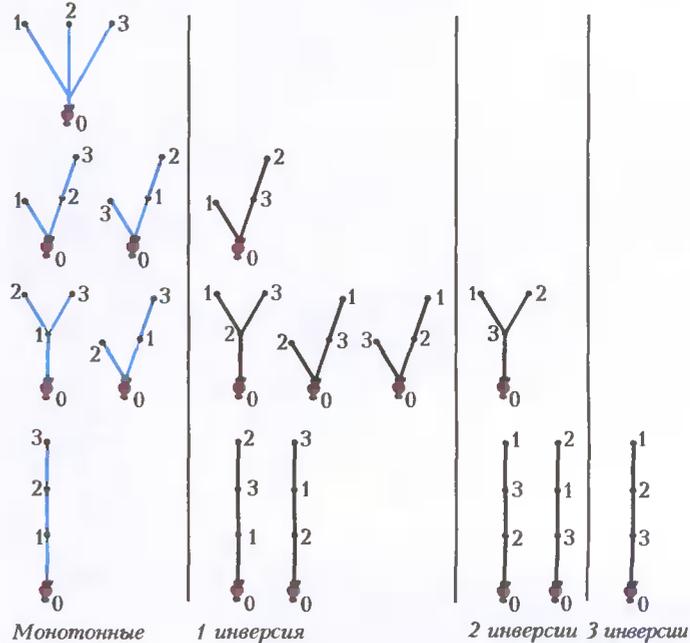


Рис. 8

³ Почему $n + 1$, а не n ? Конечно, принципиального значения это не имеет, но нам удобно особо выделять одну из вершин – корень дерева.

с корнем, изображаем на один уровень выше; вершины, в которые можно попасть из корня за два шага, изображаем на следующем уровне, и так далее. При этом у каждой вершины, кроме корня, существует единственный «родитель» – вершина предыдущего уровня, с нею соединенная. Вершину, которая не соединена ни с одной вершиной более высокого уровня, называют листом дерева, или висячей вершиной.

Упражнение 12. Докажите следующие утверждения.

а) В дереве между любыми двумя вершинами проходит единственный путь, не содержащий ни одного ребра, по которому путь проходит в обоих направлениях.

б) В каждом дереве, содержащем более одной вершины, имеется по крайней мере один лист.

в) Если удалить лист вместе с единственным выходящим из него ребром, то дерево останется деревом.

г) Количество ребер дерева на единицу меньше числа его вершин.

Монотонные деревья

Дерево, в котором зафиксирована одна вершина – корень – скорее напоминает не карту дорог, а генеалогическое древо: корень – основатель рода, вершины первого уровня – его дети, второго уровня – внуки, третьего – правнуки, и так далее. Каждая вершина соединена ребром со своим «родителем» на предыдущем уровне и со своими «детьми» уровнем выше.

Вершину номер 0, как мы договорились, изображаем ниже всех. Однако, как видно на рисунках 7 и 8, иной раз вершина с бóльшим номером встречается при движении от корня до листа раньше, чем вершина с меньшим номером. Такую пару вершин называют *беспорядком*, или *инверсией*. Дерево называют *монотонным*, если беспорядки отсутствуют или, что эквивалентно, если для любой вершины номера ее предков меньше, чем номер самой этой вершины.

Например, на рисунке 7 монотонными являются первое и второе дерево, а третье дерево не монотонное. Очевидно, для $n = 2$ имеем 2 монотонных дерева, а для $n = 3$ их 6.

Интересно, сколько существует монотонных деревьев с $n + 1$ вершиной? Оказывается, $n!$ штук – ровно столько, сколько перестановок n элементов! Чтобы доказать это, мы построим биекцию между множеством монотонных деревьев и множеством перестановок.⁴

Пусть у нас имеется монотонное дерево T с $n + 1$ вершиной, а мы хотим сопоставить ему перестановку σ . Стартуем из корня. К корню прикреплены несколько вершин первого уровня; выберем среди них вершину с наибольшим номером a и положим $\sigma(1) = a$. Теперь рассмотрим все вершины следующего уровня, чьим предком является a ; выберем из них вершину с наибольшим номером b и положим $\sigma(2) = b$. Продол-

жая подобным образом, мы рано или поздно (скажем, на k -м шаге) придем к висячей вершине. В этом случае вернемся назад по только что пройденному отрезку дерева к ближайшей вершине, у которой еще остались необработанные потомки. Выберем среди них вершину с наибольшим номером – скажем, c – и положим $\sigma(k + 1) = c$, и так далее.



Рис 9

Пусть T – дерево рисунка 9. Тогда перестановка получается так: с корнем соединены вершины с номерами 1 и 2 – выбираем 2, пишем $\sigma(1) = 2$. У вершины 2 единственный потомок – вершина 3; пишем $\sigma(2) = 3$. У вершины 3 есть два потомка – вершины 4 и 5; выбираем 5 и пишем $\sigma(3) = 5$. Вершина 5 висячая, поэтому возвращаемся назад, к развилке 3, у которой имеется необработанный потомок – вершина 4; пишем $\sigma(4) = 4$. Вершина 4 висячая, так что опять возвращаемся к развилке 3. У вершины 3, однако, все потомки уже обработаны, так что продолжаем идти вниз до следующей развилки – таковой является корень дерева. Один из потомков корня, вершина 1, еще не обработан – полагаем $\sigma(5) = 1$. Необработанных вершин не осталось, процесс завершен, получили перестановку 23541.

Очевидно, что при описанном способе построения последовательности σ мы каждую вершину дерева, кроме корня, записываем в последовательность ровно один раз. Следовательно, σ – некоторая перестановка первых n натуральных чисел.

Теорема 4. Построенное соответствие между монотонными деревьями с $n + 1$ вершинами и перестановками n предметов – биекция.

Следствие. Существует ровно $n!$ монотонных деревьев с $n + 1$ вершинами.

Доказательство теоремы 4. Чтобы доказать, что соответствие f между некоторыми множествами A и B является биекцией, достаточно показать, что у соответствия f есть обратное – иными словами, что существует способ по элементу b множества B однозначно восстановить элемент $a \in A$, для которого $b = f(a)$.

В данном случае нам нужно восстановить по перестановке σ то монотонное дерево, из которого она получена. Очевидно, пока в процессе построения последовательности мы движемся по дереву вверх, числа в последовательности $\sigma(1), \sigma(2), \dots$ увеличиваются (поскольку дерево монотонное). А как только возникает необходимость вернуться к одной из пройденных прежде развилок, соответствующий член последовательности оказывается меньше предыдущего.

Поэтому дерево T , соответствующее перестановке, можно построить так: сначала рисуем корень, он имеет номер 0. Затем берем новую вершину, присваиваем ей номер $\sigma(1)$ и соединяем ее с корнем. Затем берем новую вершину, даем ей номер $\sigma(2)$; если $\sigma(1) < \sigma(2)$, то соединяем эту новую вершину ребром с вершиной номер $\sigma(1)$, в противном случае соединяем ее с корнем. Продолжаем подобным же образом:

⁴ Очевидно, между конечными множествами можно установить взаимно однозначное соответствие (биекцию) тогда и только тогда, когда они содержат поровну элементов (как говорят, равномоцны). Таким образом, построение взаимно однозначного соответствия – способ доказать равномоцность двух множеств (и тем самым подсчитать количество элементов одного из них, если количество элементов другого известно).

на k -м шаге создаем новую вершину, даем ей номер $\sigma(k)$ и соединяем ребром с вершиной номер $\sigma(k-1)$, если $\sigma(k) > \sigma(k-1)$. Если $\sigma(k) < \sigma(k-1)$, то «сползаем вниз по дереву, пока не зацепимся», точнее, рассматриваем предка t вершины $\sigma(k-1)$. Если $t < \sigma(k)$, то соединяем новую вершину ребром с вершиной t . Если $t > \sigma(k)$, то рассматриваем предка s вершины t , и так далее. Если вершину, с которой можно соединить, так и не обнаружим, то соединяем вершину номер $\sigma(k)$ с корнем.

Например, рассмотрим перестановку 23541. Рисуем корень и соединенную с ним вершину номер 2. Затем рисуем вершину номер 3; поскольку $3 > 2$, соединяем ее с вершиной 2. Затем рисуем вершину номер 5 и соединяем ее с вершиной 3, поскольку $5 > 3$. Следующим шагом рисуем вершину номер 4; теперь $4 < 5$, и поэтому с вершиной номер 5 ее соединить нельзя (нарушится монотонность). Делаем шаг назад – там вершина с номером 3; поскольку $4 > 3$, то соединяем вершину 4 с нею. Последней рисуем вершину номер 1; поскольку ее нельзя соединить ни с вершиной 4 (поскольку $1 < 4$), ни с ее предком – вершиной 3, ни с предком вершины 3 – вершиной 2, то соединяем вершину номер 1 с корнем.

Теорема Кэли

Подсчитав количество монотонных деревьев, займемся произвольными деревьями.

Сопоставим каждому дереву T , вершины которого пронумерованы числами от 0 до n , последовательность целых неотрицательных чисел b_1, \dots, b_{n-1} , не превосходящих n , следующим образом. Рассмотрим висячие вершины дерева T и выберем среди них ту, что имеет наибольший номер. В качестве b_1 возьмем номер ее непосредственного предка («родителя») и удалим ее из графа вместе с единственным ребром, выходящим из нее, – останется дерево T_1 . Для дерева T_1 проделаем ту же процедуру, получим число b_2 и дерево T_2 , и так далее. После $(n-1)$ -го шага останется дерево из двух вершин – корня 0 и еще одной вершины; в этот момент мы процедуру прекратим, получив последовательность b_1, \dots, b_{n-1} .

Теорема 5 (Кэли). Построенное соответствие – биекция между множеством деревьев с $n+1$ вершиной и множеством всех последовательностей b_1, \dots, b_{n-1} , члены которых – целые числа от 0 до n .

Следствие. Деревья, вершины которых пронумерованы числами от 0 до n , всего $(n+1)^{n-1}$.

Доказательство теоремы Кэли. Мы укажем обратное соответствие – научимся восстанавливать дерево T , из которого получена последовательность b_1, \dots, b_{n-1} . Для этого предположим сначала, что дерево T уже построено, и рассмотрим те числа от 1 до n , которые не встречаются среди чисел b_1, \dots, b_{n-1} . Очевидно, это номера висячих вершин. Выберем среди этих номеров наибольший и обозначим его буквой a . Это номер той вершины, которую в процессе построения последовательности b_1, \dots, b_{n-1} обрабатывали первой. Ее предком является вершина номер b_1 . Удалим теперь из дерева

T эту вершину, а у остальных поменяем номера: номера вершин, большие a , уменьшим на единицу, а остальные оставим неизменными. Получится дерево T' с n вершинами (пронумерованными от 0 до $n-1$). Нетрудно видеть, что дереву T' соответствует такая последовательность b'_1, \dots, b'_{n-2} :

$$b'_k = \begin{cases} b_{k+1}, & \text{если } b_{k+1} < a, \\ b_{k+1} - 1, & \text{если } b_{k+1} > a, \end{cases}$$

где a – номер вычеркнутой вершины, $1 \leq k \leq n-2$.

Это соображение позволяет построить дерево T , применяя индукцию по n . База индукции ($n=1$) очевидна, ибо существует только одно дерево с двумя вершинами. Пусть теперь $n > 1$ и задана последовательность b_1, \dots, b_{n-1} . Определим a как наибольшее число, лежащее между 1 и n и не встречающееся среди чисел b_1, \dots, b_{n-1} . Построим теперь последовательность b'_1, \dots, b'_{n-2} по вышеприведенной формуле. Эта последовательность содержит $n-2$ члена; по предположению индукции, мы умеем строить дерево T' с n вершинами, соответствующее последовательности b'_1, \dots, b'_{n-2} ; сделаем это. Затем увеличим на единицу номера всех вершин построенного дерева, большие или равные a . После этого возьмем новую вершину, присвоим ей номер a и соединим ее с вершиной номер b_1 . Теорема Кэли доказана.

Теорема Кэли и монотонные деревья

Хотите знать, для каких последовательностей b_1, \dots, b_{n-1} соответствующее дерево монотонно? Прибавим к каждому из чисел b_1, \dots, b_{n-1} по единице и припишем справа еще число 1 в качестве n -го члена. Получаем некоторую последовательность c_1, c_2, \dots, c_n .

Теорема 6. *Дерево монотонно тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность c_1, c_2, \dots, c_n правильная.*

Доказательство. Индукция по n . Очевидно, при $n=1$ единственное существующее дерево – монотонное, и последовательность c_1, \dots, c_n имеет длину 1, т.е. состоит только из числа 1 и является, таким образом, правильной.

Пусть теперь T – монотонное дерево с $n+1$ вершиной, а c_1, \dots, c_n – соответствующая последовательность. В силу монотонности дерева T вершина с номером $n+1$ обязана быть висячей и, значит, является висячей вершиной с самым большим номером. Тогда $c_1 - 1$ – номер ее предка и, следовательно, $1 \leq c_1 \leq n$. После удаления из дерева вершины номер $n+1$ получится опять монотонное дерево, уже с n вершинами. По предположению индукции это означает, что неравенство $1 \leq c_k \leq n+1 - k$ выполнено для всех $k = 2, \dots, n$ – значит, последовательность c_1, \dots, c_n правильная.

Обратно, пусть последовательность c_1, c_2, \dots, c_n правильная. Тогда среди ее членов не встречается число $n+1$ и, следовательно, в дереве T вершина номер $n+1$ – висячая. Очевидно, дерево T' , полученное из T удалением этой вершины, соответствует правильной последовательности c_2, c_3, \dots, c_n . По предположе-

нию индукции дерево T' является монотонным. Отсюда следует, что дерево T также монотонное.

Автостоянки и деревья

Мы уже знаем, что количество деревьев с $n + 1$ нумерованными вершинами равно количеству бесконфликтных очередей для n машин. Это означает, что между множествами деревьев и бесконфликтных очередей существует взаимно однозначное соответствие. Хочется построить такие соответствие явно.

Это можно сделать несколькими способами. Вот один из них, предложенный П.Московски. Пусть дано дерево T . Нарисуем его на плоскости, как обычно – «по уровням». При таком рисовании имеется неоднозначность – нужно выбрать порядок вершин на каждом уровне. Выберем этот порядок таким, чтобы вершины, имеющие общего родителя, были упорядочены по возрастанию номеров слева направо, а ребра дерева не пересекались. Очевидно, эти условия однозначно определяют рисунок.

Перенумеруем теперь вершины (независимо от номеров, которые уже имеются): номер n получит корень, затем нумеруем подряд в порядке убывания вершины уровня 1 слева направо, потом – вершины уровня 2 слева направо, и т.д. Назовем то, что получилось, новыми номерами, а номера, которые имелись первоначально, – старыми. Построим теперь последователь-

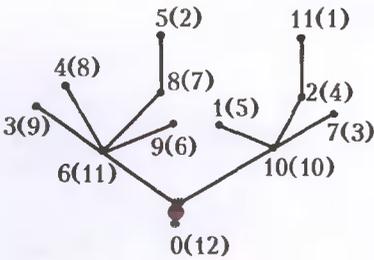


Рис.10. Этому дереву соответствует допустимая очередь (9, 9, 10, 10, 6, 11, 9, 10, 10, 11, 3)

тельность, соответствующая этому дереву, такова: (9, 9, 10, 10, 6, 11, 9, 10, 10, 11, 3).

Лемма. Полученная последовательность a_1, \dots, a_n является бесконфликтной очередью.

Доказательство. Каждое целое число k от 1 до n встречается в этой последовательности столько раз, сколько «детей» у вершины, новый номер которой равен k . Тем самым, количество членов последовательности a_1, \dots, a_n , меньших или равных k , равно общему количеству «детей» у всех вершин, новые номера которых меньше или равны k . Поскольку при выбранном нами способе нумерации номера детей любой вершины меньше, чем номер самой этой вершины, это число не превосходит k . Согласно теореме 1, последовательность a_1, \dots, a_n является бесконфликтной очередью.

Теорема 7. Построенное соответствие между деревьями и допустимыми очередями – биекция.

Доказательство. Для доказательства нужно научиться восстанавливать по бесконфликтной очереди a_1, \dots, a_n

дерево T , из которого она получена. Это можно сделать так: сначала нарисуем корень, его старый номер равен 0, а новый номер равен n . Теперь рассмотрим те i , для которых $a_i = n$. Это – номера (старые) вершин, соединенных с корнем. Нарисуем эти вершины слева направо в порядке убывания старых номеров – это позволяет определить их новые номера. Новый номер самой левой вершины первого уровня равен $n - 1$, следующей $n - 2$ и т.д. Теперь рассмотрим те i , для которых $a_i = n - 1$ – это номера вершин второго уровня, соединенных с самой левой вершиной первого уровня, и т.д.

Нетрудно видеть, что так построенное дерево T – в точности то, которое нам нужно. Однако не кончится ли процесс построения раньше времени? Например, вдруг в последовательности не окажется ни одного члена, равного n , и мы не сможем сделать даже первого шага? На самом деле так случиться не может: ведь если все n чисел a_1, \dots, a_n меньше n , то последовательность a_1, \dots, a_n не является, согласно теореме 1, бесконфликтной очередью. То же самое происходит и в общем случае: предположим, что после k шагов процесс завершился, но $k < n$, и в последовательности a_1, \dots, a_n остались неиспользованные члены, всего $n - k + 1$ штук. Все эти члены меньше $n + 1 - k$ – иначе бы процесс не остановился, что противоречит теореме 1.

Описанная выше конструкция имеет много интересных применений. Вот лишь простейшее из них: как мы видели, числа допустимой очереди, равные n , соответствуют вершинам дерева, соединенным с корнем. Поэтому мы можем следующим образом уточнить теорему 7.

Теорема 8. Количество деревьев с $n + 1$ нумерованной вершиной, в которых из корня (вершины номер 0) выходит ровно k ребер (у основателя рода имелось k детей), равно числу бесконфликтных очередей a_1, \dots, a_n , в которых имеется ровно k членов, равных n .

Упражнение 13. Найдите явно это число при $n = 2$ или 3 и всевозможных k . Нарисуйте соответствующие деревья.

Биекция Кревераса

Пусть T – дерево с $n + 1$ вершинами. Рассмотрим еще раз вопрос, сколько такое дерево может иметь беспорядков. Минимальное количество беспорядков равно нулю (такие деревья мы называли монотонными; согласно следствию теоремы 4, имеется $n!$ различных монотонных деревьев). Максимально возможное количество беспорядков достигается, когда любая пара вершин, в которую не входит корень, образует беспорядок (корень входит в беспорядок, очевидно, не может). Нетрудно видеть, что существует единственное дерево с таким свойством. Оно состоит из одной длинной «ветви», вершины на которой нумеруются снизу вверх так: 0 (корень), $n - 1$, $n - 2$, ..., 1. Число беспорядков в таком дереве равно $C_n^2 = n(n - 1)/2$.

Пусть теперь a_1, \dots, a_n – бесконфликтная очередь. Чему может равняться сумма $a_1 + \dots + a_n$? Максимальное возможное значение равно n^2 и достигается для единственной последовательности (n, n, \dots, n) . Мини-

мальное значение равно $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$ и достигается для последовательностей, представляющих собой перестановки чисел $1, 2, \dots, n$, — все такие последовательности являются бесконфликтными очередями, и всего их существует $n!$.

Заметим, что $n(n + 1)/2 + n(n - 1)/2 = n^2$. Это подсказывает, что верно следующее утверждение.

Теорема 9. *Количество бесконфликтных очередей a_1, \dots, a_n , для которых $a_1 + \dots + a_n = k$, равно количеству деревьев с $n + 1$ нумерованной вершиной, в которых имеется ровно $k - n(n + 1)/2$ беспорядков.*

Эту теорему доказал в 1980 году Г.Креверас. Он построил биекцию между множеством деревьев и множеством бесконфликтных очередей, обладающую таким свойством: если T — дерево, а a_1, \dots, a_n — соответствующая ему очередь, то беспорядков в дереве T всего $a_1 + \dots + a_n - n(n + 1)/2$.

(В предыдущем разделе мы уже построили взаимно однозначное соответствие между деревьями и бесконфликтными очередями. К сожалению, это соответствие нужным свойством не обладает.)

Приведем идею доказательства Кревераса. Оно достаточно непростое, так что не удивляйтесь, если сразу не разберетесь.⁵

Применим индукцию. Предположим, что мы уже умеем строить нужное соответствие для деревьев, содержащих меньше $n + 1$ вершин, и пусть имеется дерево с вершинами, занумерованными от 0 до n , 0 — корень. Рассмотрим путь, соединяющий вершины 0 и n , и удалим из этого пути ребро, ближайшее к корню; второй конец этого ребра — вершина с номером, который мы обозначим r . Дерево распадется на два; одно из них имеет корень 0, а второе содержит вершины номер

n и номер r ; мы будем считать вершину r корнем второго дерева.

Теперь заготовим n мест, пронумерованных от 1 до n . Отметим те из них, номера которых соответствуют вершинам первого дерева, кроме 0. Теперь перенумеруем вершины первого дерева числами $0, 1, 2, \dots$ подряд, с сохранением порядка. Полученному дереву соответствует, по индукции, последовательность — бесконфликтная очередь. Впишем эту последовательность на отмеченные места.

Со вторым деревом проделаем похожую процедуру: вершине номер r — корню — дадим номер 0, а остальные перенумеруем числами $1, 2$ и так далее подряд, с сохранением порядка. Такому дереву тоже соответствует, по индукции, бесконфликтная очередь. Прибавим ко всем членам этой очереди одно и то же число, равное общему количеству вершин первого дерева, и полученную последовательность впишем на неотмеченные места, кроме последнего (напомним, что если в дереве $k + 1$ вершина с номерами от 0 до k , то в соответствующей очереди k членов, так что одно место должно остаться незаполненным).

По завершении этой процедуры последнее место (номер n) останется свободным. На это место впишем число S , равное сумме двух чисел — количества вершин первого дерева и количества тех вершин второго дерева, номера которых меньше r (напомним, что r — это номер корня второго дерева). Тем самым, на n местах теперь написана последовательность a_1, \dots, a_n — оказывается, это искомая бесконфликтная очередь..

Упражнение 14. а) Проделайте указанную процедуру для всех деревьев при $n = 2$ и для нескольких деревьев при $n = 3$. б)* Докажите, что последовательность a_1, \dots, a_n действительно является бесконфликтной очередью. в)* Докажите, что сумма $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ равна $n(n + 1)/2 + k$, где k — количество беспорядков в исходном дереве. г)* Докажите, что построенное соответствие — взаимно однозначное, т.е. придумайте способ по бесконфликтной очереди восстановить то дерево, из которого она получена.

⁵ Для тех, кто знаком с теорией групп, отметим, что на множестве бесконфликтных очередей действует — перестановками членов — группа перестановок; при этом сумма членов сохраняется. С помощью соответствия Кревераса получается действие этой группы на деревьях, сохраняющее число инверсий; действие абсолютно неочевидное — просто так его не придумаете.

Игра Ландау

Знаменитый физик академик Лев Давидович Ландау во время поездки на машине часто предлагал спутникам посоревноваться в изобретенной им экспресс-игре с номерами попутных машин. В те времена номера состояли из двух чисел, в каждом из которых было две цифры. Требовалось добиться равенства между первой и второй парами цифр, применяя элементарные математические операции и функции, но не допуская перестановок или повторного использования цифр заданного номера.

Например, для номера 24-31 можно предложить такой вариант: $2 \cdot \sqrt{4} = 3 + 1$. Для номера 25-31 равенство достигается чуть сложнее, с использованием отрицательных чисел: $2 - 5 = -(3 \cdot 1)$. Нередко на помощь приходят логарифмы. Так, для номера 32-22 получается равенство $3 - 2 = \log_2 2$, а для номера 75-33 подходит равенство $7 - 5 = \log_{\sqrt{3}} 3$.

Встречаются и весьма трудные примеры. Ученик Ландау профессор М.И.Каганов рассказывал, что сам Ландау приводил пример, который ему «не поддавался»: 75-65. (Прав-

да, не следует думать, что Ландау долго и всерьез размышлял над этой проблемой.) Дадим подсказку: пример с номером 75-65 можно решить, применив факториал. Напомним, что факториал натурального числа n есть произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Факториал нуля по определению полагается равным единице: $0! = 1$. Последнее равенство часто приходило на помощь в игре. Например, из промелькнувшего на встречном автомобиле номера 49-02 можно получить такое равенство: $\sqrt{4} - \sqrt{9} = 0! - 2$.

А вот еще весьма трудные примеры: 59-58; 47-97 и 47-73; 27-37. Читателям предлагается попробовать свои силы в «решении» этих или других номеров.

Если вы заходите посоревноваться в этой игре с друзьями, то в качестве источника случайных чисел вы можете использовать, например, телефонные номера из записных книжек (беря две последние пары цифр), номера денежных купюр и т.п.

Б.Горобец

Звук в пене

А. СТАСЕНКО

Шипенье пенистых бокалов
И пунша пламень голубой!

А.С.Пушкин

ЕЩЕ В АНТИЧНОМ МИРЕ ПРАВИЛЬНО ОЦЕНИВАЛИ порядок скорости звука в воздухе. Теперь все знают, что эта скорость составляет приблизительно триста метров в секунду. В воде звук распространяется раз в пять быстрее – в этом можно убедиться, заглянув в справочник. А что если смешать воду с воздухом в виде пузырьков – какова будет скорость звука в этой пене? Почти всякий разумный человек ответит: наверное, где-то между значениями скоростей в воде и в воздухе. Увы, это как раз тот случай, когда интуиция (или здравый смысл) подсказывает неверный ответ.

Но рассмотрим все по порядку. Как известно, средний квадрат скорости теплового движения молекул газа v связан с его температурой T :

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m} = \frac{3RT}{M}.$$

Здесь k – постоянная Больцмана, m – масса одной молекулы, R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса вещества. А поскольку молекулы «общаются» друг с другом при столкновениях, можно ожидать, что и скорость звука по величине будет порядка тепловой скорости. Только звук – это организованный, направленный поток энергии, поэтому его скорость должна быть несколько меньше скорости беспорядочного, хаотического метания молекул равновероятно во все стороны. И действительно, для воздуха квадрат скорости звука приблизительно вдвое меньше, чем указанное выше значение $\langle v^2 \rangle$. Точная формула учитывает еще и число степеней свободы молекулы i :

$$v_{зв}^2 = \frac{i+2}{i} \frac{RT}{M}.$$

Так как воздух состоит в основном из двухатомных молекул (моделируемых «гантельками»), то для него $i = 5$, для одноатомных газов (гелий, неон, аргон, криптон, радон) $i = 3$, а для многоатомных $i = 6$, так что можно составить такую простую таблицу:

i	3	5	6
$\frac{i+2}{i}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{4}{3}$

Видно, что этот точный множитель $\frac{i+2}{i}$ для любого газа порядка единицы. Это значит, что численную оценку скорости звука можно было бы получить прямо

из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} \sim v_{зв}^2.$$

Кстати сказать, великий Ньютон считал, что это точное равенство. Но тоже великий Лаплас показал, что нужно ввести еще множитель $\frac{i+2}{i}$. Полученное при этом и приведенное выше точное выражение учитывает еще и следующие соображения: ведь звук есть распространение в газе малых возмущений давления Δp , плотности $\Delta \rho$, температуры ΔT , поэтому должно играть роль отношение $\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \sim v_{зв}^2$. Причем указывается и процесс, в котором происходят эти малые изменения параметров газа, – оказывается, этот процесс адиабатический, т.е. настолько быстрый, что соседние области сжатия и разрежения в звуковой волне не успевают обменяться друг с другом энергией:

$$v_{зв}^2 = \left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \right)_{ад}. \quad (1)$$

Для жидкости (индекс «ж») уравнение состояния часто записывают в виде

$$\frac{p - p_0}{\rho - \rho_0} = v_{зв ж}^2$$

(что тоже можно представить в виде отношения малых изменений давления и плотности: $\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = v_{зв ж}^2$).

А зачем вообще нужно знать скорость звука в воздухе? А вот, например, зачем.

Сверхзвуковой самолет, по определению, должен лететь со скоростью $v > v_{зв}$. Отношение $\frac{v}{v_{зв}} = Ma$ называется числом Маха, по имени австрийского физика. Для современных истребителей это число достигает значения $Ma \geq 3$ – значит, они летят быстрее винтовочной пули или артиллерийского снаряда. Можно представить себе, как непросто и недешево разогнать воздух в аэродинамической трубе при испытании на земле (неподвижных) моделей сверхзвуковых летательных аппаратов. Конечно, можно брать более «тяжелые» газы (с большим значением молярной массы M , чем для воздуха, у которого $M = 29$ кг/кмоль), например аргон ($M = 40$ кг/кмоль) или криптон ($M = 84$ кг/кмоль). Но, во-первых, эксперимент станет очень дорогим, а во-вторых, это не избавит от проблемы: ведь $v_{зв} \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$. Чтобы радикально решить

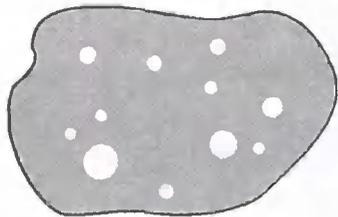


Рис. 1

проблему, надо бы уменьшить скорость звука в рабочем газе (а с нею и скорость потока) хотя бы на порядок. Получается, что нужен газ с $M \sim 3000$ кг/кмоль – а где его взять?

Но это все присказка, а сказка – впереди. Поговорим о пене. Пусть смесь жидкости и газа (рис.1) с общей массой M занимает суммарный объем V . Обе эти величины являются аддитивными (или, как говорят термодинамики, экстенсивными), т.е., проще говоря, их можно получать сложением:

$$M = M_{\Gamma} + M_{\text{ж}},$$

$$V = V_{\Gamma} + V_{\text{ж}}.$$

Введем понятие массовой доли газа в этой смеси:

$$\alpha = \frac{M_{\Gamma}}{M}.$$

Тогда, очевидно, массовая доля жидкости будет равна $1 - \alpha$. Используя этот термин, можно, разделив суммарный объем на суммарную массу, получить следующее выражение для величины, обратной средней плотности пены:

$$\frac{V}{M} = \frac{1}{\rho} = \frac{V_{\Gamma} + V_{\text{ж}}}{M} = \frac{V_{\Gamma}}{M_{\Gamma}} \alpha + \frac{V_{\text{ж}}}{M_{\text{ж}}} (1 - \alpha).$$

Но отношение массы каждой фазы (газа и жидкости) к своему объему есть истинная плотность этой фазы: $\frac{M_{\Gamma}}{V_{\Gamma}} = \rho_{\Gamma}$, $\frac{M_{\text{ж}}}{V_{\text{ж}}} = \rho_{\text{ж}}$. Так что предыдущее выражение можно переписать в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha}{\rho_{\Gamma}} + \frac{1 - \alpha}{\rho_{\text{ж}}}. \quad (2)$$

Предположим, что газ не растворим в жидкости. Это означает, что при любых сжатиях или растяжениях пены массовая доля газа остается постоянной, т.е. $\alpha = \text{const}$ (хотя объем самих пузырьков может и изменяться). В этом предположении запишем предыдущую формулу в виде малых приращений. Для этого нужно вспомнить следующее правило:

$$\Delta \left(\frac{1}{x} \right) = - \frac{\Delta x}{x^2}.$$

Кто это знает, тот молодец, а для того, кто не знает, приведем вывод. Перепишем исходное выражение в виде

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{1}{x} \right) &= \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1 + \Delta x/x)} - \frac{1}{x} = \\ &= \frac{1}{x} \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{-1} - 1 \right). \end{aligned}$$

Используя формулу для биннома Ньютона, получим

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{-1} = 1 - \frac{\Delta x}{x}.$$

Тут видно, что мы пренебрегли уж очень малыми величинами порядка квадрата отношения $\frac{\Delta x}{x}$. Итак,

$$\Delta \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{\Delta x}{x} - 1 \right) = - \frac{\Delta x}{x^2}.$$

Применим это правило к выражению для среднеобъемной плотности пены:

$$\Delta \left(\frac{1}{\rho} \right) = - \frac{\Delta \rho}{\rho^2} = - \alpha \frac{\Delta \rho_{\Gamma}}{\rho_{\Gamma}^2} - (1 - \alpha) \frac{\Delta \rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ж}}^2}.$$

(Заметим, что здесь не предполагается несжимаемость жидкости – в противном случае нужно было бы признать, что скорость звука в ней бесконечно велика.) Теперь учтем принятое выше выражение (1) для скорости звука в каждой фазе в отдельности и в пене в целом:

$$v_{\text{зв}}^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}, \quad v_{\text{зв} \Gamma}^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho_{\Gamma}}, \quad v_{\text{зв} \text{ж}}^2 = \frac{\Delta p}{\Delta \rho_{\text{ж}}}$$

и разделим обе части полученного выше уравнения на приращение давления Δp . В результате получим

$$\frac{1}{\rho^2 v_{\text{зв}}^2} = \frac{\alpha}{\rho_{\Gamma}^2 v_{\text{зв} \Gamma}^2} + \frac{1 - \alpha}{\rho_{\text{ж}}^2 v_{\text{зв} \text{ж}}^2},$$

или, подставив в левую часть соотношение (2), –

$$\left(\frac{\alpha}{\rho_{\Gamma}} + \frac{1 - \alpha}{\rho_{\text{ж}}} \right)^2 \frac{1}{v_{\text{зв}}^2} = \frac{\alpha}{\rho_{\Gamma}^2 v_{\text{зв} \Gamma}^2} + \frac{1 - \alpha}{\rho_{\text{ж}}^2 v_{\text{зв} \text{ж}}^2}. \quad (3)$$

Теперь осталось только исследовать зависимость скорости звука в пене от массовой доли газа. Конечно, задавая свойства обеих фаз в отдельности (их невозможные истинные плотности и скорости звука), можно рассчитать скорость звука в пене для различных значений α и построить соответствующую кривую $v_{\text{зв}}(\alpha)$. Но мы проведем здесь лишь качественный анализ, зато пригодный для любой пары жидкость – газ.

Прежде всего убедимся в том, что полученное выражение (3) верно для двух предельных случаев – чистого газа и чистой жидкости. Действительно, подставляя значение $\alpha = 1$, получим $v_{\text{зв}} = v_{\text{зв} \Gamma}$; подставляя $\alpha = 0$, получим $v_{\text{зв}} = v_{\text{зв} \text{ж}}$. Эти два случая указаны на рисунке 2 светлыми кружками.

Пусть теперь газа много, а жидкости мало. Это значит, что $\alpha \leq 1$, $1 - \alpha \ll 1$. Тогда вторыми слагаемыми в обеих частях уравнения (3) можно пренебречь. А учитывая, что у них в знаменателе стоят (да еще в квадрате) плотность жидкости и скорость звука в жидкости, которые много больше соответствующих параметров для газа, можно заключить, что этими слагаемыми можно пренебречь и для значений α , не очень близких к единице, например для $\alpha = \frac{1}{2}$. Итак,

$$\frac{1}{v_{\text{зв}}^2} \left(\frac{\alpha}{\rho_{\Gamma}} \right)^2 = \frac{\alpha}{\rho_{\Gamma}^2 v_{\text{зв} \Gamma}^2},$$

откуда

$$v_{\text{зв}} = v_{\text{зв} \Gamma} \sqrt{\alpha}. \quad (4)$$

Разве это не удивительный результат: скорость звука в пене меньше чем даже в газе, а тем более в жидкости!

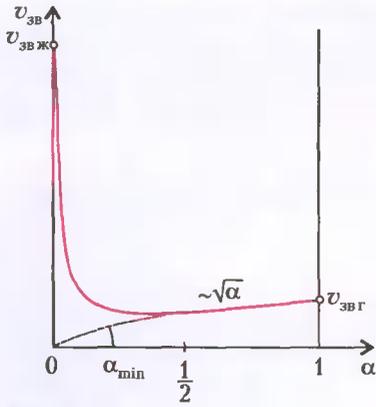


Рис. 2

Поэтому возникает желание немедленно найти ее наименьшее значение.

Будем двигаться в сторону убывающих значений α (см. рис.2). Ясно, что с приближением к нулевому значению (в пределе – к чистой жидкости) кривая должна взлететь вверх. Следовательно, где-то тут, при малых значениях α , и нужно ожидать минимума. При этом уже нельзя пренебрегать отношением $\frac{1-\alpha}{\rho_{\Gamma}}$ по сравнению с отношением $\frac{\alpha}{\rho_{\Gamma}}$. Наоборот, будем считать, что они сравнимы:

$$\frac{\alpha}{\rho_{\Gamma}} \sim \frac{1-\alpha}{\rho_{\Gamma}}$$

откуда получим

$$\alpha_{\min} \sim \frac{1}{\frac{1}{\rho_{\Gamma}} + \frac{1}{\rho_{\Gamma}}} = \frac{\rho_{\Gamma}\rho_{\Gamma}}{\rho_{\Gamma} + \rho_{\Gamma}}$$

Где-то вблизи этого значения кривая (4) даст

$$v_{zv1} = v_{zv\Gamma} \sqrt{\frac{\rho_{\Gamma}}{\rho_{\Gamma}}}$$

А поскольку кривая тут должна пересечься с левой ветвью зависимости $v_{zv}(\alpha)$, то значение скорости удвоится:

$$v_{zv\min} = 2v_{zv1} = 2v_{zv\Gamma} \sqrt{\frac{\rho_{\Gamma}}{\rho_{\Gamma}}} \quad (5)$$

Заметим, что во всех этих рассуждениях предполагается, что длина звуковой волны λ должна быть много больше характерного радиуса пузырьков и среднего расстояния между ними, так чтобы на длине λ среду можно было считать однородной и приписывать ей среднеобъемную плотность ρ . В противном случае пришлось бы рассматривать взаимодействие акустической волны с отдельным пузырьком.

Сделаем численные оценки для пузырьков воздуха в воде. В этом случае имеем $v_{zv\Gamma} \sim 300$ м/с, $v_{zv\Gamma} \sim 1500$ м/с, $\rho_{\Gamma} \sim 1$ кг/м³, $\rho_{\Gamma} = 10^3$ кг/м³. Подставляя эти значения величин в формулу (5), найдем

$$v_{zv\min} \sim 2 \cdot 300 \text{ м/с} \cdot \sqrt{\frac{1}{1000}} \sim 20 \text{ м/с}$$

При этом массовая доля пузырьков в воде должна составить $\alpha_{\min} = 10^{-3}$. (Это не так уж мало: в этом случае объемные доли газа и жидкости сравнимы друг с другом.)

Итак, получен удивительный результат: скорость звука в пене на порядок меньше, чем в воздухе!

Физическая причина этого факта ясна: большое количество жидкости обеспечивает массовую инертность среды, а наличие пузырьков газа обуславливает ее сжимаемость.

Но из этого следует и практически важный вывод: можно сделать сверхзвуковую «аэродинамическую трубу», в которой рабочим телом будет пена, и уже при скорости потока в ней, скажем, 30 м/с можно будет испытывать модели сверхзвуковых самолетов. А не подумать ли и о сверхзвуковой подводной лодке в предварительно вспененном океане (конечно, помня при этом и о законе Архимеда)?

Но бывают и твердые пены. Например, в природе встречается пемза – пористая губчато-ноздреватая очень легкая горная порода вулканического происхождения. Из искусственных твердых пен можно указать пеностекло, пенобетон, микропористую резину, различные пенопласты. Исследование распространения звука в них чрезвычайно важно для предсказания акустических свойств помещений, при строительстве которых используются эти материалы.

Поистине – любой закон физики или даже любая малая находка, сделанная на основе этого закона, находят применение в человеческой практике.



Итальянцы эпохи Возрождения

А. ВАСИЛЬЕВ

ВОЗРОЖДЕНИЕ, КАК ОДНА ИЗ НАИБОЛЕЕ ярких страниц в истории цивилизации, традиционно охватывает XIV – XVI века в Италии и XV – XVI века в других странах Европы. Свое название этот период получил в связи с возрождением интереса к античному искусству и наукам, именно в эпоху Возрождения были заложены основы новой европейской культуры. Так, в архитектуре утвердились творчески переработанные принципы античной ордерной системы и сложились новые типы частных и общественных зданий. Живопись обогатилась линейной и воздушной перспективой, знанием анатомии и пропорций человеческого тела. Не менее впечатляющим оказался расцвет точных наук, причем многие представители Возрождения обладали столь глубокими познаниями в физике и математике и столь явным талантом в изящных искусствах, что определить их принадлежность лишь к одной из этих сфер человеческой деятельности не представляется возможным.

Из многочисленной кагорты итальянских физиков и математиков эпохи Возрождения на монеты и банкноты мира попали лишь Пьеро делла Франческа, Лука Пачоли и Леонардо да Винчи. Удивительным образом оказалось, что эти три человека последовательно связаны между собой как учитель и ученик: Пьеро обучал математику Луку, а Лука – Леонардо.

Пьеро делла Франческа (1420 – 1492), известный как знаменитый художник Раннего Возрождения, считался одним из наиболее компетентных математиков своего

времени. До сих пор не потерял свою ценность его трактат «О перспективе в живописи», равно как «Счет» или «Книжица о пяти правильных телах».

«О перспективе в живописи» явилось, по сути, развитием принципов теоретика искусства того времени Леоне Баттиста Альберти (1404 – 1472), который в трактате «О живописи» писал: «... ничего не восхищает меня больше, чем математические исследования и демонстрации, особенно когда я могу обратить их на такие полезные занятия, как построение перспективы в живописи и перемещение тяжестей с помощью механических приспособлений». Альберти и Франческа рассматривали в своих работах математические аспекты перспективы – техники, с помощью которой трехмерные объекты могут быть представлены на плоскости. Эти работы до сих пор не утратили своего значения, хотя, возможно, и утратили актуальность для некоторых направлений современной живописи.

«Счет» представляет собой сборник математических упражнений, использовавшихся для преподавания арифметики, алгебры и геометрии. В этой книге, так же, как и в «Книжице», рассматриваются регулярные многогранники Архимеда, по существу представляющие собой усеченные многогранники Платона. Известные еще древним грекам пять правильных выпуклых многогранников – тела Платона – включают куб, тетраэдр, додекаэдр, октаэдр и икосаэдр. Отличительной чертой этих тел служит тот факт, что все их грани суть одина-

Человеку много ль надо?

В различных источниках встречаются разные цифры суточной потребности человека в калориях. Они варьируются в зависимости от автора и времени публикации. Так, в «Справочнике по физике» А.С.Еноховича, изданном в 1990 году, приводятся такие данные: теплота сгорания суточного рациона пищи для ученых, врачей, студентов и подобных им категорий населения в возрасте от 18 до 40 лет колеблется от 2800 до 3300 ккал.

Поскольку расчеты, в результате которых получаются эти килокалории, мне нигде не встречались, проверим субъективные медицинские рекомендации объективным физическим законом Стефана–Больцмана. В соответствии с ним, тело с абсолютной температурой T излучает с единицы площади в единицу времени в среду с абсолютной температурой $T_0 < T$ энергию, равную $\alpha\sigma(T^4 - T_0^4)$, где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт · м⁻² · К⁻⁴ – постоянная Стефана – Больцмана, α – безразмерный коэффициент излучательной способности тела. Например, для воды, из которой в основном и состоит человек, $\alpha = 0,92$. Конечно, человек теряет тепло не только при излучении, но все-таки сделаем оценку.

Известно, что температура кожи человека в разных местах тела различна: от наименьшей 30,2 °С на подошве до наиболь-

шей 36,7 °С в подмышечной впадине (где мы ее обычно и измеряем). Если считать условно температуру по всему телу равной 36,7 °С, то получим не совсем точный, но весьма близкий к истине результат. Учтем, что площадь поверхности тела среднего человека составляет 1,82 м².

Представим себе студента, отдыхающего в тени на пляже в безветренную погоду при температуре воздуха 25 °С. В таких комфортных условиях можно находиться часами. Неважно, что сутки на пляже не пробудешь, ведь можно вести речь и о часовой энергетической потребности организма. Подсчет теряемого тепла, проведенный с помощью закона Стефана – Больцмана, дает величину 10655 кДж, равную 2543 ккал, что соответствует 83% от средней величины 3050 ккал, взятой из упомянутого справочника.

Но на пляже не только отдыхают, а и плавают, играют в волейбол... Температура воды заметно ниже температуры окружающего воздуха, да и теплоотдача тела в воду гораздо больше, чем в воздух. Кроме того, пловец совершает работу, и немалую.

Очевидный вывод: не бойтесь съесть лишнего, но двигайтесь побольше.

В. Дроздов

ковые правильные многоугольники и во всех их вершинах встречается равное количество одинаковых граней. Кубы, тетраэдры и октаэдры представляют собой строительные блоки многих кристаллов, додекаэдры и икосаэдры появляются при переходе от неорганического к органическому миру и встречаются, например, в некоторых вирусах и радиоляриях. Многогранники же Архимеда отличаются тем, что в их вершинах в одной и той же последовательности встречаются два или более видов правильных многоугольников. Архимедовы многогранники оказались вновь открытыми в эпоху Возрождения. Их полный набор был восстановлен в 1619 году Иоганном Кеплером, причем оказалось, что два из этих многогранников обладают асимметрией при замене «правого» на «левое», что есть проявление зеркальной асимметрии Вселенной на всех уровнях (вправо закрученные спиральные раковины, вправо закрученные молекулы ДНК и т.д.).

Ни одна из математических работ Пьеро делла Франческа не была опубликована под его именем в эпоху Возрождения. Эти работы циркулировали в рукописях и стали известны благодаря включению в работы других авторов. Наиболее важную роль в этом отношении сыграли труды Луки Пачоли «Сумма» (1494 г.) и «Божественная пропорция» (1509 г.).

Лука Пачоли (1445–1514) родился в том же итальянском городе Сан-Сеполькро, что и его учитель Пьеро делла Франческа. Еще в юном возрасте Лука переехал в Венецию, а затем в Рим, где в 1470 году останавливался в доме Леоне Баттиста Альберти. С 1477 года Лука Пачоли начал преподавать математику в различных учебных заведениях, среди которых университеты Перуджи, Задара, Неаполя и Рима. Свою знаменитую «Сумму» — обзор известных сведений из арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии — Лука написал в Сан-Сеполькро, куда он вернулся в 1489 году. Многие разделы «Суммы» содержат пересказ известных ранее трудов Евклида, Фибоначчи и других авторов. Эта, опубликованная в Венеции, книга стала базисом дальнейшего развития европейской науки. Интересно отметить, что в части, касающейся азартных игр, «Сумма» излагает основы того, что в современной науке известно как теория вероятностей. В дальнейшем судьба Луки Пачоли тесно переплетается с судьбой Леонардо да Винчи. Леонардо состоял при Миланском дворе еще с 1482 года, а в 1496 году туда приехал и Пачоли.

С переездом в Милан Лука начал работу над второй своей знаменитой книгой «Божественная пропорция», причем иллюстрации к ней делал именно Леонардо. В первом из трех томов этого издания Лука обсуждает правильные (и неправильные) многогранники, анализирует «божественную пропорцию», или «золотое сечение». Разумеется, Леонардо не был простым иллюстратором книги, он принимал самое деятельное участие в ее обсуждении на всех этапах. Даже термин «золотое сечение», исходно введенный Птолемеем, был популяризирован Леонардо, который придавал важное значение гармоническим соотношениям в живописи, архитектуре и строении человеческого тела. Свое восхищение «золотым сечением» Кеплер, например, выразил в таких словах: «...в геометрии мы обладаем двумя сокровищами: теоремой Пифагора и «золотым сечением». Первое сопоставимо с золотом, а второе — с драгоценным камнем».

По традиции, «золотое сечение» вводится в геометрии через построение правильных пятиугольников — как выпуклых, так и звездчатых. Без этого сечения невозможно построение упоминавшихся выше додекаэдра (двенадцатигранника) и икосаэдра (двадцатигранника). Считается, что такие процедуры были известны еще в пифагорейских общинах. У пифагорейцев с правильным пятиугольником была связана мысль о таинственных силах, а в средние века пентаграмма играла важную роль в оккультных церемониях. Гуманизм Возрождения заключался, в частности, в том, что пентаграмма была выведена из ведения черной магии, а пропорции «золотого сечения» Леонардо усмотрел в строении человеческого тела.

Знаменитый живописец Леонардо да Винчи (1452–1519) создал бы, наверное, еще больше прекрасных картин, не будь он столь увлечен любезной его сердцу математикой. Хотя его должность при дворе Миланского герцога предусматривала занятия как живописью, так и инженерным делом, Леонардо решительно отдавал предпочтение последнему. Круг его интересов охватывал практически все естественные науки, он увлекался конструированием всевозможных приспособлений, военного оборудования и летательных аппаратов. В 1498 году Леонардо написал книгу по механике, а несколько позже занялся астрономией и описал ряд оптических приборов. Он понимал, что Луна светится отраженным светом, и полагал, что, как и Земля, она располагает морем и сушей.

Автор знаменитой «Джоконды» оставил после себя более 4000 страниц бесценных рукописей по анатомии, зоологии, географии, геологии и палеонтологии (написанных, кстати сказать, с использованием криптографии справа налево). Трудно перечислить его труды по механике, гидравлике и аэродинамике. Завершить краткий рассказ о научной деятельности Леонардо можно физическим законом, носящим его имя.

Исследуя закон трения, Леонардо заложил основы научного направления, развитого впоследствии Амонтоном, Эйлером и Кулоном. Закон Леонардо, гласящий, что сила трения не зависит от площади контакта, был выведен им из экспериментов по перемещению бруска по наклонной плоскости. Укладываемая брусок разными гранями, Леонардо нашел, что необходимая для его смещения по плоскости сила определяется лишь весом бруска. К такому же выводу пришел позже и Гильом Амонтон (1663–1705) в экспериментах по смещению грузов по горизонтальной плоскости. Фактор пропорциональности между весом груза и силой трения он называл «фрикционной постоянной». Тогда как Леонардо изучал статическую силу трения, Амонтон работал с динамическими величинами. Разница между динамическим и статическим трением была осознана лишь Леонардом Эйлером (1707–1783), а Шарлем Кулоном (1736–1806) были поставлены эксперименты по определению трения движения при разных скоростях.

Закон Леонардо выглядит очень парадоксальным. Интуитивно следовало ожидать, что сила трения окажется пропорциональной площади контакта. Этот парадокс разрешается тем, что геометрически видимая площадь контакта вовсе не соответствует реальной площади контакта. Эта реальная площадь намного меньше видимой, и она, разумеется, находится в прямом соответствии с силой трения.

Катушка, вращающаяся в магнитном поле

В. МАЙЕР, Р. МАЙЕР

УСТАНОВЛЕННЫЙ ФАРАДЕЕМ ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ГОВОРИТ О ТОМ, ЧТО ЭДС ИНДУКЦИИ, ВОЗНИКАЮЩАЯ В ПРОВОДЯЩЕМ ВИТКЕ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНА СКОРОСТИ ИЗМЕНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОТОКА ЧЕРЕЗ ВИТОК:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1)$$

Чтобы экспериментально обосновать справедливость этой формулы, нужно уметь измерять ЭДС индукции и скорость изменения магнитного потока. Последнее кажется наиболее трудным, так как нет доступных приборов, позволяющих определить величину магнитного потока.

А что если виток вращать в однородном постоянном магнитном поле? Тогда магнитный поток через него будет периодически изменяться, и скорость этого изменения нетрудно определить по угловой скорости вращения витка. Попробуем исследовать и реализовать эту идею.

Элементы теории. Пусть виток вращается вокруг оси, лежащей в его плоскости и проходящей через центр витка. Если индукция однородного магнитного поля B , а угловая скорость вращения витка ω , то магнитный поток через виток изменяется по закону

$$\Phi = BS \cos \omega t, \quad (2)$$

где S – площадь витка (здесь за начало отсчета времени принят момент, когда вектор нормали к витку \vec{n} сонаправлен с вектором индукции \vec{B}). В этом случае ЭДС индукции равна

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (3)$$

Построим график зависимости ЭДС индукции ε от угла поворота ωt витка, вращение которого происходит против часовой стрелки, в полярной системе координат (рис. 1). В начальный момент времени $t = 0$, при котором векторы нормали \vec{n} и индукции \vec{B} сонаправлены, ЭДС индукции равна нулю. В момент, когда виток повернется на угол $\omega t = \pi/2$, ЭДС индукции достигает максимального значения ε_m . При произвольном угле поворота ωt ЭДС индукции равна $\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$. Именно такой отрезок нужно отложить на радиусе-векторе (нормали к витку) полярной системы координат, чтобы построить одну из точек A требуемого графика.

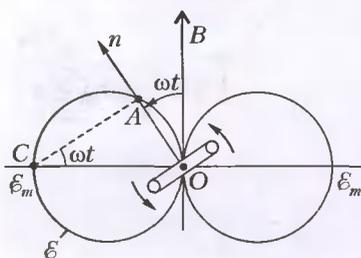


Рис. 1

Из рисунка 1 видно, что точка A вместе с точками O и C обозначают вершины прямоугольного треугольника OAC . Значит, все точки строящегося графика лежат на окружности, диаметром которой является гипотенуза OC треугольника OAC . Продолжая рассуждения, приходим к выводу, что полный график представляет собой две окружности одинакового диаметра ε_m , проходящие через начало координат O и расположенные симметрично относительно оси \vec{B} .

Идея эксперимента. Понятно, что эксперимент, подтверждающий изложенную теорию, нужно проводить не с отдельным витком, а с катушкой, состоящей из множества витков, так как это увеличит ЭДС индукции и значительно снизит требования к чувствительности измерительных приборов. Возникающая в катушке из N витков ЭДС индукции в N раз больше, чем для одного витка:

$$\varepsilon = -N \frac{d\Phi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t = \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (4)$$

Как убедиться в том, что действительно на концах катушки возникает ЭДС индукции, изменяющаяся по закону (4)? Для этого к выводам катушки можно подключить электроизмерительный прибор или, что лучше, осциллограф и исследовать генерируемое напряжение. Однако сделать это не так просто: катушка вращается, поэтому для соединения ее выводов с измерительным прибором придется использовать коллектор из пары колец и щеток. А там где щетки – там плохой контакт и связанные с этим всякого рода сложности и неприятности. Вот почему мы предлагаем измерительный прибор разместить непосредственно на вращающейся катушке. В качестве такого прибора удобно использовать светодиод, который своим свечением и яркостью покажет наличие ЭДС индукции и позволит оценить ее величину.

Разберемся, что именно можно увидеть с помощью светодиода. Напомним, что светодиод – это малоинерционный полупроводниковый источник света, который загорается при определенном пороговом напряжении U_0 . В той же полярной системе координат, что и раньше (см. рис. 1), построим график напряжения зажигания светодиода. Очевидно, это окружность радиусом U_0 с центром в начале координат O (рис. 2). Светодиод загорается, когда ЭДС индукции превышает напряжение зажигания, т.е. когда $\varepsilon > U_0$. На рисунке 2 жирными линиями выделены те части графика напряжения зажигания, которые удовлетворяют этому неравенству.

Светодиод закрепим на конце катушки на расстоянии R от ее центра. Тогда при вращении катушки он будет описывать окружность радиусом R и загорится, когда ЭДС индукции превысит его порог зажигания. Однако, при повороте катушки на угол π знак ЭДС индукции изменится на противоположный, и светодиод погаснет, поскольку обладает односторонней проводимостью. Чтобы пронаблюдать наличие ЭДС индукции и в этом случае, на конце катушки рядом с первым закрепим второй светодиод, включенный в противоположном направлении.

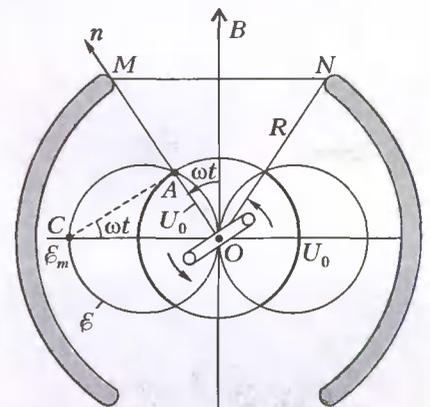


Рис. 2

Кроме того, выберем светодиоды разного цвета, например красный и зеленый, чтобы по окраске свечения сразу можно было судить о знаке ЭДС индукции.

Такая катушка со светодиодами при вращении в магнитном поле обозначит две симметричные дуги разного цвета (см. рис. 2). Отрезок между концами светящихся дуг, очевидно, имеет длину $MN = 2R \sin \omega t$. Из треугольника OAC видно, что $\sin \omega t = U_0/\mathcal{E}_m$, поэтому получаем

$$MN = 2R \frac{U_0}{\mathcal{E}_m} = \frac{2RU_0}{NSB\omega} = k \frac{1}{B\omega}, \quad (5)$$

где k – некоторый коэффициент, постоянный для данной конструкции прибора.

Таким образом, длина отрезка, соединяющего ближайшие концы светящихся дуг, обратно пропорциональна индукции магнитного поля и угловой скорости вращения в нем катушки. Если эксперимент подтвердит справедливость этого вывода, то тем самым будет обоснована справедливость формулы (4) и закона электромагнитной индукции (1).

Экспериментальное оборудование. Устройство прибора схематически показано на рисунке 3: катушка 1 с ферромагнитным сердечником

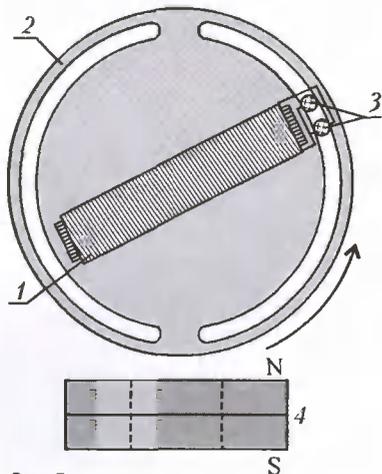


Рис. 3

установлена на дюралевом диске 2, центр которого закреплен на валу школьной центробежной машины перпендикулярно оси вращения. К выводам катушки подключены два разноцветных светодиода 3, соединенные параллельно во взаимно противоположных направлениях. Рядом с прибором расположены кольцевые керамические магниты 4.

Катушка намотана на сердечник сечением 15×15 мм и длиной 80 мм, набранный из пластин трансформаторной стали. Она содержит от 2000 до 4000 витков провода ПЭЛ 0,15 (чем больше количество витков, тем выше чувствительность прибора). Для индикации использованы красный и зеленый светодиоды типа АЛ307А и АЛ307Б (применение современных сверхъярких светодиодов значительно повышает эффективность опытов). Чтобы при вращении катушка не соударялась с постоянным магнитом, она

расположена на дюралевом диске, диаметр которого на 2–3 мм превышает длину катушки.

На рисунке 4 приведена фотография одного из изготовленных нами приборов. В нем сердечник просверлен посередине и непосредственно закреплен на валу, который установлен в центробежной машине, а для защиты катушки и светодиодов использована донная часть пластиковой бутылки.

Вы уже поняли, что конструктивно прибор может быть оформлен самыми различными способами, важно только выдерживать основные параметры катушки. Заметим, кстати, что 2000 витков вполне достаточно, а намотать их можно вручную в течение примерно часа. Вместо центробежной машины, которой может не оказаться в физическом кабинете, вполне подойдет ручная дрель. Мы изготовили около 10 описанных приборов, и все они всегда работали, несмотря на то что в некоторых из них в качестве сердечника применялись стальные болты, в других – катушки наматывались очень небрежно или использовались готовые, например от старых реле.

Натурный эксперимент. Для опытов подберите кольцевые керамические магниты диаметром примерно 80 мм от старых динамиков или иных устройств.

Опыт 1. Вначале катушку оставьте неподвижной и к ее сердечнику резко поднесите магнит; при этом один из светодиодов загорается. Магнит резко удалите от сердечника – загорается второй светодиод. Отсюда следует, что при изменении магнитного потока в катушке возникает ЭДС индукции, в зависимости от направления которой загорается красный или зеленый светодиод.

Опыт 2. Катушку приведите во вращение и медленно приближайте к вращающейся катушке магнит. Вы увидите, что возникают две диаметрально противоположные светящиеся дуги красного и зеленого цвета, которые разделены темными промежутками (рис. 5). Отрезок, соединяющий эти промежутки, параллелен направлению магнитного поля. Светящиеся дуги становятся ярче и увеличиваются в размерах по мере роста скорости вращения катушки и приближения к ней магнита. При повороте магнита вокруг оси вращения катушки светящиеся дуги поворачиваются так, что отрезок, соединяющий темные промежутки, остается параллельным магнитному полю (рис. 6). При изменении направления вращения катушки или направления магнитного поля на противоположное разноцветные дуги меняются местами.

Сопоставляя результаты всех проделанных опытов, можно прийти к выводу, что во вращающейся в постоянном магнитном поле катушке возникает переменная ЭДС индук-

(Продолжение см. на с. 37)



Рис. 4



Рис. 5



Рис. 6

Задачи

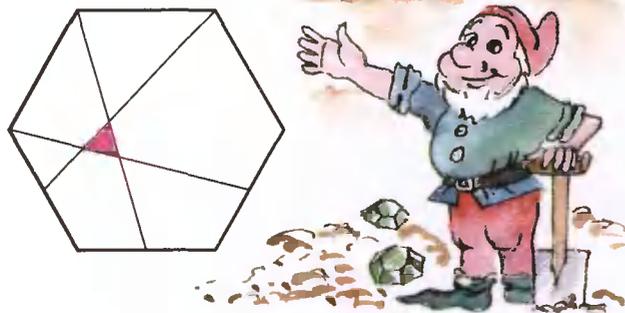
1. Каких натуральных чисел от 1 до 10000 больше: четных или нечетных с четной суммой цифр?

А.Зайчик



2. В правильном шестиугольнике три последовательные вершины соединены с серединами соответствующих сторон. Докажите, что в пересечении образуется равносторонний треугольник.

В.Произволов



3. Двор императора погряз в интригах. Но самым ловким интриганом оказался сам император. Он разведал состав всех действующих при дворе тайных обществ, и оказалось, что в каждом из них состоят



ровно трое придворных. Каждый день всех придворных, состоящих на начало этого дня в наибольшем числе обществ, император стал ссылать на повышение в провинцию. Общества, понесшие потери в составе, распадаются, а новые указы о повышениях издаются до тех пор, пока не распадутся все общества.

Хранитель Императорской чернильницы состоит в меньшем числе тайных обществ, чем кто-либо другой из придворных, и поэтому пребывает в уверенности, что его никуда не сошлют. Обоснована ли эта уверенность, если состав остальных обществ хранителю неизвестен?

Р.Голдырев, С.Латушкин (ученики 10 кл.)

4. Пять натуральных чисел таковы, что наибольший общий делитель любых трех из них равен наименьшему общему кратному оставшихся двух. Могут ли среди этих чисел быть неравные?

А.Жуков



5. Прямолинейный канал, имеющий ширину 1, дважды поворачивается под прямым углом так, как показано на рисунке. Расстояние между участками поворота достаточно велико.

Очевидно, что по этому каналу может проплыть квадратный плот площади 1. Укажите плот еще большей площади, который тоже сможет проплыть по каналу.

А.Грамши



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6 – 8 классов.

Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и математических кружков. Руководителей кружков просим указать электронный адрес или контактный телефон. По традиции, кружки-победители заочного конкурса приглашаются на финальный очный турнир.

1. Какое наименьшее количество взвешиваний на чашечных весах без гирь необходимо для того, чтобы обнаружить 3 фальшивые монеты среди 11 одинаковых по внешнему виду монет, выложенных в ряд, если известно, что фальшивые монеты более тяжелые по весу, все они весят одинаково и расположены рядом друг с другом (подряд)?

И.Николаева

2. При каких простых числах p число $2^p + 1$ делится на 9?

В.Сендеров

3. С помощью линейки и циркуля с постоянным раствором постройте остроугольный треугольник, в котором один угол в 2 раза больше другого.

Р.Сарбаш

4. Существуют четверки целых чисел x, y, u, v , которые удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} ux - vy = 2, \\ vx + uy = 2. \end{cases}$$

Найдите все такие четверки.

А.Жуков

5. В стол воткнули 3 вертикальных стержня. На первый стержень стопкой надели n красных колец, на второй — n синих, третий стержень оставили пустым. За один ход разрешается снять верхнее кольцо с любого стержня и надеть его на любой другой стержень поверх имеющихся на нем колец. Каждый стержень может вместить все кольца. Требуется переложить кольца так, чтобы они снова лежали на первых двух стержнях, но чтобы их цвета чередовались. При этом на первом стержне чередование должно начинаться с синего кольца (считая снизу), а на втором — с красного.

а) За какое наименьшее число ходов это можно сделать?

б) Для каких n можно было бы осуществить требуемую перекладку, если бы каждый стержень вмещал не более n колец?

И.Гага, И.Акулич

Опыты с пластиковыми бутылками

Р.ДАМИНОВ

УДОБНАЯ И ПРАКТИЧНАЯ ПЛАСТИКОВАЯ БУТЫЛКА В умелых руках может превратиться во множество полезных предметов: воронку, совок, футляр, умывальник, термос, кормушку для птиц, плот, спасжилет и др. Она оказалась также весьма эффективным

средством для проведения ряда простых и наглядных физических опытов.

Простота механической и термической обработки бутылок позволяет делать из них нужные предметы быстро и без специальных инструментов, а их доступность, многообразие форм, размеров и расцветок дают простор для экспериментального творчества.

Предлагаем несколько простых опытов с пластиковыми бутылками.

Тепловой фонтан. В опыте демонстрируется струя воды, фонтанирующая из бутылки при нагревании находящегося в ней воздуха (рис. 1).

Соплом фонтана служит трубка, например выработанный пишущий стержень шариковой ручки, вставленная в просверленное в бутылочной крышке отверстие. (Стык стержня и крышки для герметичности надо промазать пластилином.) На стержень надевают кусок мягкой трубки, которая должна плотно облепать его. В



Рис. 1. Водяной фонтан

бутылку на треть ее объема наливают прохладную воду и плотно завинчивают крышку. Свободный конец трубки должен находиться под водой и располагаться у дна бутылки.

Для получения фонтана бутылку обливают горячей водой (но не крутым кипятком). Воздух в бутылке при этом быстро прогревается, и его давление растёт. Избыточным давлением вода из бутылки выбрасывается через сопло наружу в виде фонтана высотой до полутора метров.

Реакция струи. Этот опыт демонстрирует вращение бутылки под действием реакции вытекающих из нее водяных струй (рис. 2).

Дно бутылки должно быть рельефным, с симметричными выступами. Обычно число этих выступов равно пяти, хотя встречаются бутылки и с четырьмя, и с шестью выступами (чем больше выступов — тем лучше для опыта).

В каждом из выступов с помощью шила делают по одному отверстию. (Кончик шила предварительно надо нагреть на пламени, чтобы края отверстий получились гладко оплавленными.) Все отверстия должны располагаться по одну сторону выступов, чтобы вода из них вытекала горизонтально и в одном направлении, например по ходу часовой стрелки.

Отверстие делают также и в центре крышки, в которое продевают тонкую леску. С внутренней стороны крышки на леске завязывают узелок, а к другому концу лески привязывают колечко, за которое удерживают конструкцию во время опыта. (В качестве такого колечка удобно использовать ободок, остающийся на горлышке бутылки после ее раскупоривания.)

Перед проведением опыта бутылку заполняют водой, закрывают крышкой, снабженной колечком и леской, и помещают в ведро, также заполненное водой. Для демонстрации опыта бутылку вынимают из ведра, чуть приоткрывают крышку, давая воздуху возможность проникнуть внутрь бутылки, и оставляют в подвешенном состоянии, удерживая за колечко. С момента появления из бутылки струй она начнет быстро вращаться вокруг своей продольной оси. Вытекающие при этом струи образуют красивый водяной купол.

Невесомость и перегрузка. Тело, лишенное в земных условиях своей опоры или подвеса, пребывает в невесомости. Поэтому любому падающему телу свойственно это состояние. Напомним, что невесомость — это состояние тела, при котором отсутствует взаимное

давление составляющих его частиц друг на друга.

В литературе описано немало хитроумных конструкций для наблюдения этого состояния, содержащих комбинации пружинок, грузиков и элементов электрических цепей. Предлагаемый способ демонстрации невесомости с помощью бутылки и воды прост, надежен и убедителен.

В боку пластиковой бутылки близ ее дна делают отверстие диаметром 3–4 миллиметра. Бутылку заполняют водой и закрывают крышкой. При плотно завернутой крышке вода из отверстия вытекать не должна. Затем крышку чуть отвинчивают, давая воздуху возможность проникнуть под нее. При этом из отверстия потечет струйка воды (рис. 3, а).

Удерживая бутылку за горлышко, подбрасывают ее вверх на полтора-два метра так, чтобы в полете она не кувыркалась и оставалась в вертикальном положении. Тогда хорошо видно, что все то время, пока бутылка летит, находясь в состоянии невесомости, вода из нее не вытекает (рис. 3, б).

Прекращение истечения воды из бутылки во время свободного полета можно объяснить так. Пока бутылка покоится в руках, на придонный слой воды давит



Рис. 2. Реактивная карусель

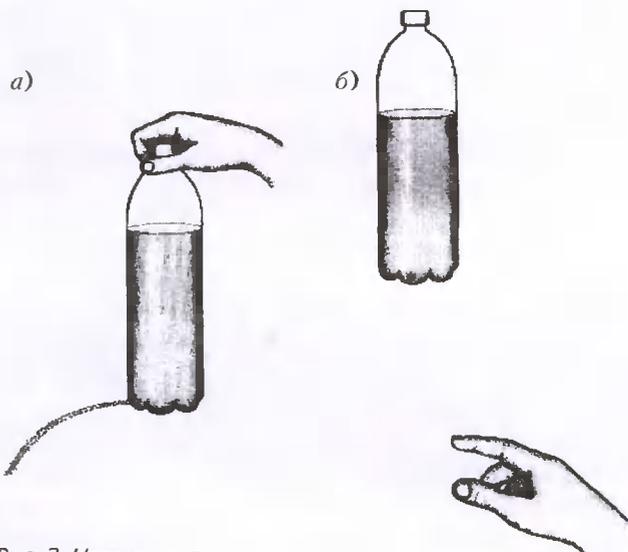


Рис. 3. Невесомость

тяжесть расположенного над ним водяного столба. Это давление и выталкивает воду наружу (через отверстие) в виде струи. При свободном полете бутылки вверх вода не давит на дно, поскольку движущаяся вверх вода как бы стремится оторваться от него. А во второй половине полета, т.е. собственно на участке свободного падения, уже дно, проваливаясь вниз, «избегает» воздействия находящейся над ним воды.

Явление, противоположное невесомости, — перегрузка. Тело испытывает состояние перегрузки, когда обстоятельства вызывают повышенное взаимное давление его частиц друг на друга. Продемонстрировать перегрузку даже проще, чем невесомость.

Ту же самую бутылку с отверстием у дна заполняют водой, причем крышку на ней в этом случае плотно завинчивают, исключив проникновение наружного воздуха внутрь. При удерживании бутылки за крышку в неподвижном состоянии вода из отверстия вытекать не должна (рис. 4,а). (Если вода все же вытекает, а

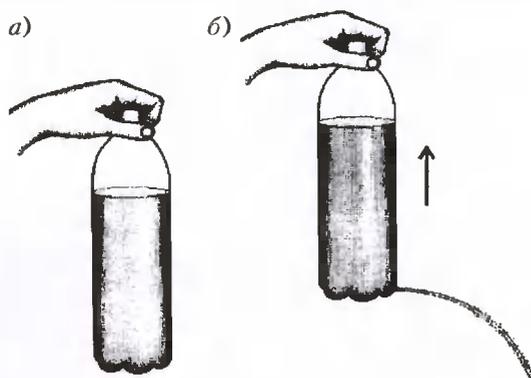


Рис. 4. Перегрузка

пузырьки воздуха через то же отверстие одновременно проникают внутрь, то эту бутылку надо заменить на другую, с меньшим отверстием.) Из неподвижной бутылки вода не течет потому, что гидростатическое давление на уровне отверстия уравновешено наружным атмосферным давлением.

Затем, удерживая бутылку за крышку, надо резко поднять ее вверх. Во время подъема из отверстия появляется струя, причем течет она тем сильнее, чем с большим ускорением осуществляется подъем (рис. 4,б). Зафиксировав бутылку в верхнем положении, затем ее плавно опускают вниз, в исходное состояние. В конце этого движения струя появляется вновь.

Истечение струи. В 1641 году итальянский физик и математик Эванджелеста Торричелли установил, что скорость истечения из отверстия в открытом сосуде для всех жидкостей в одинаковых условиях одинакова. Ее величина зависит от высоты уровня жидкости в сосуде, отсчитанной от центра отверстия.

Это в точности выполняется лишь для идеальной жидкости. В реальности же скорость истечения несколько меньше и существенно зависит от контура и размера отверстия, от вязкости жидкости и величины ее расхода.

Чтобы различие скоростей истечения в начале и в конце опыта было заметным, нужно сделать начальную высоту всего столба жидкости достаточно большой. Поэтому и бутылку для проведения опыта надо использовать высокую.

В боковой стенке этой бутылки, вблизи ее дна, протыкают раскаленным на пламени гвоздем отверстие диаметром 2–3 мм. Над этим отверстием на расстоянии 10–15 см от него делают второе такое же отверстие. Еще потребуются невысокий, но широкий сосуд, куда будет сливаться вода (это может быть тазик), и подставка под бутылку высотой около полуметра (например, табуретка). До начала демонстрации бутылка с водой должна находиться в заполненном водой ведре.

С момента водружения бутылки на подставку из ее боковых отверстий вытекают две струи, которые, плавно изгибаясь под действием силы тяжести, стекают в широкий сосуд, причем падают они туда на разных удалениях от бутылки (рис. 5). Поскольку высота водяного столба над нижним отверстием больше, чем над верхним, скорость истечения воды из нижнего



Рис. 5. Скорости истечения струй

отверстия больше. Поэтому нижняя струя и удаляется на большее расстояние.

С течением времени высота водяного столба в бутылке постепенно уменьшается, соответственно уменьшаются скорость истечения каждой струи и расстояние до места падения.



Победители конкурса
«Задачник «Кванта»
2003 года



Первое место заняли

по математике

Исаев Михаил – г. Барнаул, школа-гимназия 42,
Добровольская Галина – Украина, г. Киев,
лицей 171 «Лидер»;

по физике

Горбенко Ярослав – г. Чебоксары, лицей 1.

Второе место заняли

по математике

Лунев Антон – Украина, г. Донецк, лицей «Эрудит»;

по физике

Аскарян Владимир – г. Волгодонск, школа 24.

Третье место заняли

по математике

Мамбетов Бектур – Киргизия, г. Бишкек, школа-лицей 61,
Войтов Андрей – Украина, г. Донецк, лицей «Эрудит»;

по физике

Зотов Константин – г. Волжский, школа 30,
Герасимов Константин – г. Волоколамск, школа 1.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Уланов Максим – г. Протвино, школа 1,
Ляшко Андрей – г. Балашов, Гуманитарно-педагогический лицей,
Кузнецов Василий – Украина, г. Киев, лицей 171 «Лидер»,
Бударагин Дмитрий – г. Нижний Новгород, лицей 40,
Красильников Александр – г. Ульяновск, гимназия 79,
Семенов Павел – г. Зеленоград, лицей 1557,
Кочкин Александр – г. Волжский, школа 30,
Гутник Михаил – Украина, г. Донецк, лицей «Эрудит»,
Беликова Виктория – Украина, г. Донецк, лицей «Эрудит»;

по физике

Дьяков Антон – г. Армавир, школа 9,
Скорынин Александр – г. Ставрополь, школа 29,
Зорин Андрей – г. Харабали, школа 1,
Быков Дмитрий – г. Чебоксары, лицей 1,
Исаченков Михаил – г. Москва, АМУ при Московской консерватории,
Головань Алексей – г. Братск, лицей 1.

**Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами
журнала «Квант» за второе полугодие 2004 года.**

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2004 года по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 – 2004» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1916» или «Ф1923». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1917 и М1920 предлагались в этом году на окружном этапе Всероссийской математической олимпиады.

Задачи Ф1923, Ф1925 – Ф1927 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1916–М1920, Ф1923–Ф1927

М1916. Равносторонний треугольник разрезан на 25 равносторонних треугольничков, лишь один из которых имеет отличную от 1 площадь. Какую?

В.Произволов

М1917. О натуральных числах a , p , q известно, что $ap + 1$ делится на q , а $aq + 1$ делится на p . Докажите, что $a > \frac{pq}{2(p+q)}$.

А.Голованов

М1918. К двум окружностям проведены общие внешние касательные, одна из которых касается окружностей в точках A и B . Бильярдный шар, выпущенный из точки A , отразился от второй касательной и попал в точку B . Докажите, что хорды, высекаемые его траекторией на окружностях, равны.

А.Заславский

М1919. Докажите, что число

а) $2004^x + 1$,

б) $2004^x - 1$

не является второй или более высокой целой степенью натурального числа ни при каком натуральном x .

А.Васильев

М1920. Существуют ли такие действительные x , что числа $\text{ctg } x$ и $\text{ctg } 2004x$ оба целые?

И.Богданов, В.Сендеров

Ф1923. Найдите ускорение оси блока O в системе, состоящей из невесомых блоков, легких нерастяжимых нитей и грузов, массы которых указаны на ри-

сунке 1. Трением пренебречь. Ускорение свободного падения равно g . Участки нити, не лежащие на блоках, вертикальны.

Д.Ягнятинский

Ф1924. Динамометр «гимназический» представляет собой подставку массой $M = 0,5$ кг, к которой прикреплен пружинка массой $m = 0,1$ кг, содержащая много одинаковых витков (рис. 2). Динамометр тянут за один из крючков силой $F = 1$ Н, направленной вдоль оси пружинки. Что показывает динамометр? Трения между подставкой и столом, а также между пружинкой и подставкой нет.

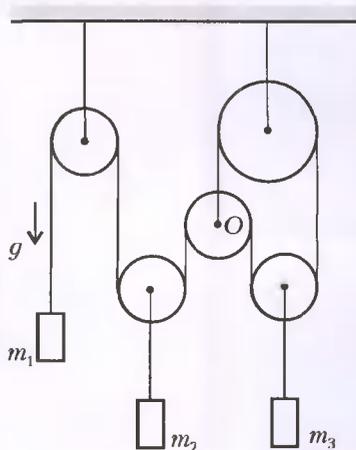


Рис. 1

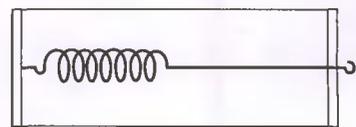


Рис. 2

А.Крючков

Ф1925. Стоящий вертикально закрытый цилиндрический сосуд разделен на две части тяжелым поршнем. Поршень изготовлен из материала, который не пропускает воздух, но медленно пропускает гелий. В начальный момент в нижней части сосуда находится воздух, а в верхней – в 5 раз меньшее количество молей гелия.

При этом объемы нижней и верхней частей сосуда одинаковы и равны V , а поршень находится в равновесии. Найдите, на какое расстояние сместится поршень спустя достаточно большое время. Площадь поршня S , температура системы все время поддерживается постоянной, трения нет.

А.Якута

Ф1926. Внутри «черного ящика» между клеммами включена схема, состоящая из нескольких одинаковых резисторов. Снаружи к клеммам 1 и 2 подключена батарейка с ЭДС \mathcal{E} и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, а к клеммам 3 и 4 подключен идеальный вольтметр с нулевым делением посередине шкалы (рис.3). Если включить такой же резистор, как те, что находятся внутри ящика, между клеммами 1 и 3 или 2 и 4, то вольтметр покажет напряжение $+U$, а если включить этот резистор между клеммами 1 и 4 или 2 и 3, то вольтметр покажет $-U$. Если резистор не включать вовсе, вольтметр показывает нулевое напряжение. Нарисуйте схему возможных соединений внутри ящика, содержащую минимальное число резисторов, и определите величину U .

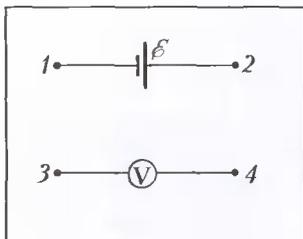


Рис. 3

М.Семенов

Ф1927. В вертикальный цилиндрический стакан налита вязкая жидкость с коэффициентом преломления $n = 1,5$. Сверху в стакан вертикально падает параллельный пучок света постоянной интенсивности. Стакан с жидкостью раскрутили вокруг его оси до угловой скорости $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, при этом высота столба жидкости на оси стакана стала равной $h = 30 \text{ см}$. На сколько процентов изменилась после раскручивания интенсивность света, падающего вблизи центра дна стакана? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$, поглощением света в жидкости и отражением его внутри стакана пренебречь.

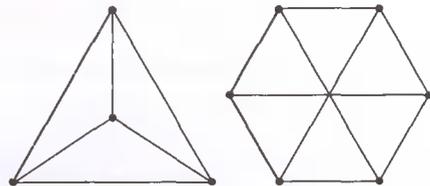
К.Дмитриев

Решения задач М1891–М1900, Ф1908–Ф1912

М1891. Среди n рыцарей каждые двое – либо друзья, либо враги. У каждого из рыцарей ровно три врага, причем враги его друзей являются его врагами. При каких n такое возможно?

Прежде всего подсчитаем общее число пар врагов. У каждого из n рыцарей по 3 врага, т.е. всего получаем $3n$ пар врагов. Но здесь каждая пара врагов учитывалась дважды, поэтому на самом деле имеется $3n/2$ пар врагов. Так как это – целое число, то n – четное число. Запомним пока этот результат.

Рассмотрим двух врагов A и B . У A должно быть еще ровно 2 врага, поэтому общее число рыцарей не меньше 4. Докажем, что оно также и не больше 6. Допустим обратное – что всего рыцарей не меньше 7. Рассмотрим любых семерых из них, в том числе A и B . Тогда среди пятерых остальных ровно двое – враги A (ибо всего у



A три врага, в том числе B). Поэтому остальные трое – друзья A и, следовательно, – враги B . Таким образом, у B не меньше 4 врагов (а именно: A и три друга A). Противоречие.

Итак, в коллективе от 4 до 6 рыцарей. Так как n – четное число, то n равно 4 или 6. Примеры показывают, что обе эти возможности осуществимы (на рисунках рыцари обозначены жирными точками, а каждые два врага соединены отрезком).

Е.Барабанов, И.Воронович

М1892. В треугольнике ABC угол C равен 45° . Докажите, что

$$AB^4 = (BC^2 - AB^2)^2 + (CA^2 - AB^2)^2.$$

Обозначим $AB = k$, $CA = m$, $BC = l$. Тогда по теореме косинусов

$$\begin{cases} l^2 - k^2 = \sqrt{2}ml - m^2, \\ m^2 - k^2 = \sqrt{2}ml - l^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (l^2 - k^2)^2 + (m^2 - k^2)^2 &= \\ &= 4m^2l^2 + m^4 + l^4 - 2\sqrt{2}ml(m^2 + l^2) = \\ &= (l^2 + m^2 - \sqrt{2}ml)^2 = (k^2)^2 = k^4, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

А.Румянцева

М1893. В круге проведены 100 хорд так, что середина любой из них принадлежит какой-либо другой из этих хорд. Докажите, что среди них найдутся два диаметра.

Если среди 100 хорд найдется один диаметр круга, то его середина (т.е. центр круга) по условию принадлежит еще другой какой-либо из наших 100 хорд. Но в таком случае эта другая хорда тоже будет, уже вторым, диаметром круга. Значит, достаточно убедиться, что среди 100 хорд обнаружится один диаметр.

Чтобы в этом убедиться, возьмем самую длинную из 100 хорд, т.е. ту, для которой расстояние OM между ее серединой M и центром круга O будет минимальным. Если эта хорда является диаметром, то все в порядке – мы обнаружили диаметр. Если же нет, то другая хорда, проходящая через M , будет длиннее ее – вопреки предположению.

В.Произволов

М1894. Пусть m , n – натуральные числа, $n > 1$. Известно, что число

$$m^2n^2 - 4m + 4n$$

является точным квадратом. Докажите, что $m = n$.

Покажем, что число

$$A_{m,n} = m^2n^2 - 4m + 4n$$

не может быть точным квадратом как в случае $m < n$, так и в случае $m > n$.

Рассмотрим сначала случай $m < n$. Если $m \geq 2$, то

$$m^2 n^2 < A_{m,n} < (mn + 1)^2.$$

Пусть $m = 1$. Тогда при $n > 2$ справедливы неравенства

$$(n + 1)^2 < A_{1,n} < (n + 2)^2,$$

а число $A_{1,2} = 8$ не является точным квадратом.

Предположим теперь, что $m > n$. Имеем

$$(mn^2 - 2)^2 < n^2 A_{m,n} < m^2 n^4.$$

Следовательно, $n^2 A_{m,n} = (mn^2 - 1)^2$, т.е. $4n^3 = 2mn^2 + 1$. Но полученное равенство, очевидно, невозможно. Итак, $m = n$.

Н. Осипов

M1895. В квадрат $ABCD$ вписан треугольник MAN такой, что $\angle MAN = 45^\circ$ (рис.1). Докажите, что диагональ квадрата BD делит треугольник на две части равной площади.

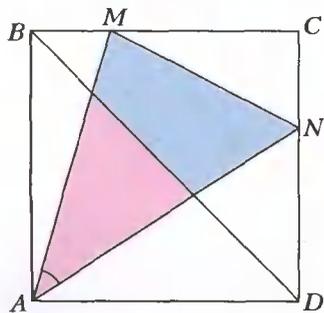


Рис. 1

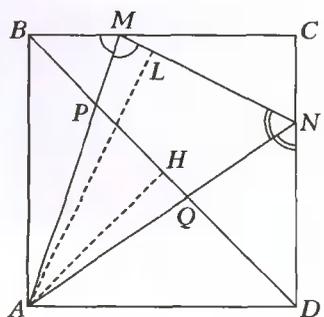


Рис. 2

Заметим, что треугольник MAN можно сложить из прямоугольных треугольников ABM и ADN , если их приставить равными катетами AB и AD друг к другу. Из этого можно сделать два вывода: первый тот, что высота AL треугольника MAN равна стороне квадрата, и второй тот, что AM и AN являются биссектрисами углов BMN и MND соответственно (рис.2).

Треугольник APQ подобен треугольнику DNQ , и значит, $\angle APQ = \angle QND$. Откуда следует, что $\angle APQ = \angle MNA$, т.е. треугольники APQ и MAN подобны. Отношение их соответственных высот равно $AL/AN = \sqrt{2}$. Значит, площадь треугольника MAN вдвое больше площади треугольника APQ , что равносильно утверждению задачи.

В.Произволов

M1896. На квадратном холсте со стороной $2n + 1$ (n – натуральное число) художник нарисовал картину черной краской. При этом оказалось, что в каждом квадратике 2×2 , стороны которого параллельны сторонам холста, покрашено в черный цвет а) не менее $3/4$ его площади, б) не более $3/4$ его площади. Какую наименьшую площадь в случае а) и какую наибольшую площадь в случае б) мог закрасить на холсте художник черной краской?

Решение. Поместим в квадрат K со стороной $2n + 1$ две ступенчатые фигуры F_1 и F_2 , каждая из которых составлена из $n(n + 1)/2$ квадратиков 2×2 (рис.1). На-

более темные клетки принадлежат обеим фигурам, а белые клетки не принадлежат ни одной из них. Очевидно, что площадь пересечения фигур F_1 и F_2 и площадь части квадрата, не покрытой фигурами, соответственно равны $S(F_1 \cap F_2) = n$ и $S(K \setminus (F_1 \cup F_2)) = n + 1$. Обозначим размер закрашенной

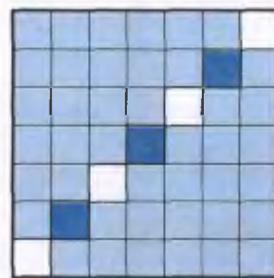


Рис. 1

площади в квадрате K через S , в фигуре F_1 – через S_1 , а в фигуре F_2 – через S_2 .

а) Пусть в каждом квадратике 2×2 , стороны которого параллельны сторонам квадрата K , покрашено не менее $3/4$ его площади. Следовательно, выполнены неравенства $S_1 \geq 3n(n + 1)/2$ и $S_2 \geq 3n(n + 1)/2$. Тогда, очевидно, верно соотношение

$$S \geq S_1 + S_2 - S(F_1 \cap F_2) \geq \geq 3n(n + 1) - n = n(3n + 2).$$

Для завершения остается только привести картину, для которой эта нижняя оценка достигается. Эта картина показана на рисунке 2.

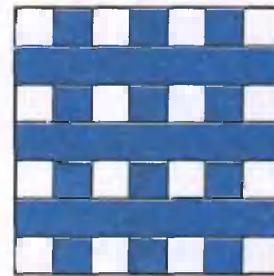


Рис. 2

б) Пусть теперь в каждом квадратике 2×2 , стороны которого параллельны сторонам квадрата K , покрашено не более $3/4$ его площади. В этом случае $S_1 \leq 3n(n + 1)/2$ и $S_2 \leq 3n(n + 1)/2$. Тогда, очевидно, верно неравенство

$$S \leq S_1 + S_2 + S(K \setminus (F_1 \cup F_2)) \leq \leq 3n(n + 1) + n + 1 = (n + 1)(3n + 1).$$

Остается вновь привести картину, на которой эта верхняя оценка достигается. Эта картина изображена на рисунке 3.

Легко убедиться, что на обеих картинах в каждом квадратике 2×2 , стороны которого параллельны сторонам холста, покрашено ровно $3/4$ его площади.

А.Малеев

M1897. На числовой прямой отмечены точки с координатами $1, 2, 3, \dots, 2n$. Блоха за $2n$ прыжков побывала во всех отмеченных точках и вернулась в исходную точку. При этом любые два последовательных прыжка были противоположно направлены. Известно, что сумма длин всех прыжков блохи за исключением последнего равна $4n - 3$. Докажите, что длина последнего прыжка равна $2n - 1$.

Сперва сформулируем вспомогательное утверждение. Натуральные числа от 1 до $2n$ записаны по кругу так, что любое из них либо больше обоих соседей – тогда оно красное, либо меньше обоих соседей – тогда оно синее. Сумма n красных чисел отличается от суммы n

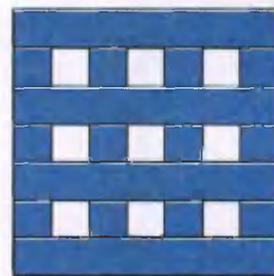


Рис. 3

синих чисел не менее чем на $3n - 2$. (При этом минимум $3n - 2$ достижим для любого n , хотя это нам не понадобится.) Доказательство этого факта рекомендуем провести читателю методом математической индукции самостоятельно.

Применительно к задаче можно сделать вывод: сумма длин всех прыжков блохи (включая и последний) не меньше $6n - 4$.

Это значит, что последний прыжок блохи по длине не меньше чем $2n - 1$. Но он в принципе не больше $2n - 1$. Значит, последний прыжок блохи равен $2n - 1$.

В.Произволов

M1898. $ABCD$ – прямоугольник. Сторона AD точками A_1, A_2, \dots, A_{n-1} разделена на n отрезков. На стороне BC отмечены точки B_1, B_2, \dots, B_n , некоторые из которых или даже все могут совпадать. Проведем в прямоугольнике зигзагообразную ломаную $A_0B_1A_1B_2 \dots A_kB_{k+1}A_{k+1} \dots A_n$, возможно, самопересекающуюся, где A_0 – это A , A_n – это D . Как следует выбрать точки A_k, B_k , чтобы сумма длин радиусов r_k окружностей, вписанных во все n треугольников $A_kB_{k+1}A_{k+1}$, была наибольшей?

Ответ: сторону AD следует разделить на равные части, все треугольники $A_kB_{k+1}A_{k+1}$ должны быть равнобедренными.

Доказательство. Не меняя точки A_k , заменим точки B_k на новые так, чтобы каждый из указанных треугольников стал равнобедренным. При этом каждый радиус r_k увеличится. При неизменной длине основания A_kA_{k+1} и постоянной площади S_k треугольника $A_kB_{k+1}A_{k+1}$ полупериметр при такой замене точек B_k уменьшится, а радиус r_k – согласно формуле $r = \frac{S}{p}$ – увеличится.

Из n равнобедренных треугольников рассмотрим далее такие два, что основание одного меньше AD/n , а основание второго – больше. Теперь, сохраняя все треугольники равнобедренными, будем заменять точки A_k на новые так, чтобы длины оснований всех других треугольников не менялись, а длины оснований этих двух треугольников приближались к числу AD/n . Соответственно, будут меняться только длины двух радиусов. Пусть длины оснований этих двух изменяющихся треугольников равны $2x$ и $2y$, общая высота – h .

Исходя из формулы $r = \frac{S}{p}$, легко получить, что

$$r_1 = r(x) = \frac{1}{h} x \left(\sqrt{x^2 + h^2} - x \right).$$

Если числа x и y сближаются, но при этом их сумма остается неизменной, то сумма $r_1 + r_2 = r(x) + r(y)$ увеличивается. Для доказательства этого достаточно проверить, что график функции $r = r(x)$ является выпуклым вверх. Последнее следует из неравенства $r''(x) < 0$, которое легко проверяется. После того как длина одного отрезка A_kA_{k+1} станет равной одной n -й части длины AD , начнем сближать длины двух других отрезков. В итоге все треугольники окажутся равнобедренными.

При всех изменениях сумма радиусов увеличивалась. Это завершает доказательство.

С.Дворянинов

M1899. Обозначим

$$f(n) = \sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma.$$

Пусть α, β, γ – углы остроугольного треугольника.

а) Докажите неравенство $f(n) < f(1)$ при $n = 3, 4$.

б) Докажите неравенство $f(n) \leq f(1)$ при $n = 2, 8$.

в) Докажите, что для любого натурального $n > 4$, $n \neq 7, 8$ существует такой остроугольный треугольник Δ_n с углами $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$, что $f(n) > f(1)$.

Ниже нам понадобятся следующие тождества, справедливые при любом натуральном n и $\alpha + \beta + \gamma = \pi$:

$$\begin{aligned} \sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma &= \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 4 \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sin(2n-1)\alpha + \sin(2n-1)\beta + \sin(2n-1)\gamma &= \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 4 \cos(2n-1) \frac{\alpha}{2} \cos(2n-1) \frac{\beta}{2} \cos(2n-1) \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тождества (1) и (2) сразу выводятся из почти очевидного тождества

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) &= \\ &= 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}. \end{aligned}$$

а) Заметим, что в случае остроугольного треугольника и $n = 2$ правая часть (1) отрицательна – что и доказывает неравенство $f(4) < f(1)$. Пусть теперь $2n - 1 = 3$, т.е. $n = 2$. С помощью (2) перепишем неравенство $f(3) < f(1)$:

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} > -\cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{3\beta}{2} \cos \frac{3\gamma}{2}.$$

Для доказательства последнего неравенства достаточно заметить, что $\cos \tau > |\cos 3\tau|$ при $\tau \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ и что

числа $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$ принадлежат этому интервалу.

б) Вследствие (1) и (2) неравенство $f(2) \leq f(1)$ можно переписать в виде

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}. \quad (3)$$

Неравенство (3) допускает различные аналитические доказательства; вот одно из них.

Обозначим левую часть рассматриваемого неравенства через t . Тогда

$$t = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha-\beta}{2} - \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \frac{\alpha+\beta}{2},$$

так как

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Положив

$$\cos \frac{\alpha+\beta}{2} = x,$$

получим

$$x^2 - \cos \frac{\alpha-\beta}{2} x + 2t = 0,$$

откуда

$$\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 8t \geq 0, \quad \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \geq t.$$

Неравенство $f(2) \leq f(1)$ допускает и чисто геометрическое, не опирающееся на тождества (1) и (2) доказательство. Именно, в естественных обозначениях имеем

$$2S = R^2 (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

(для доказательства достаточно соединить центр описанной окружности треугольника с его вершинами). Далее,

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{p}{R}.$$

Поэтому неравенство эквивалентно $Rp \geq 2S$, или $R \geq 2 \frac{S}{p}$, или $R \geq 2r$. Мы пришли к хорошо известному и легко доказываемому неравенству (для доказательства достаточно, например, заметить, что радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника, равен $\frac{R}{2}$ и не меньше r).

Непосредственное (без перехода к форме $f(2) \leq f(1)$) геометрическое доказательство можно получить и для неравенства (3): достаточно заметить, пользуясь равенством $S = \frac{1}{2}(2R \sin \alpha)(2R \sin \beta) \sin \gamma$, что

$$4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{R}, \quad - \text{мы опять приходим к тому же классическому неравенству } R \geq 2r.$$

Заметим также, что данные выше доказательства неравенства $f(2) \leq f(1)$ не используют остроугольность треугольника.

Докажем теперь неравенство $f(8) \leq f(1)$.

Вследствие тождеств (1) и (2) доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$1 \geq -\frac{\sin 4\alpha \sin 4\beta \sin 4\gamma}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}},$$

или

$$1 \geq -2^9 \left(\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \right) \times (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) (\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma).$$

Поскольку $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$, то достаточно доказать два неравенства:

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad -\cos 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\gamma \leq \frac{1}{8}.$$

Оба они сразу следуют из неравенства $\cos x \cos y \cos(x+y) \geq -\frac{1}{8}$, доказательство которого аналогично первому доказательству неравенства (3).

в) Ниже нам понадобится следующее важное, имеющее много разнообразных доказательств утверждение.

Теорема. Если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Равенство имеет место в точности при $\alpha = \beta = \gamma$.

Доказательство. Пусть $\sin \alpha \geq \sin \beta \geq \sin \gamma$; без ограничения общности будем считать $\sin \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2}$. Поскольку

ку $\min\{\beta, \gamma\} < \frac{\pi}{3}$, то $\sin \gamma < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Далее, поскольку $\alpha > \frac{\pi}{3}$, то $\gamma < \frac{2\pi}{3}$, откуда $\gamma < \frac{\pi}{3}$. Докажем, что

$$\sin \alpha + \sin \gamma < \sin \frac{\pi}{3} + \sin \left(\alpha + \gamma - \frac{\pi}{3} \right).$$

Имеем

$$\sin \alpha + \sin \gamma = 2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2},$$

$$\sin \frac{\pi}{3} + \sin \left(\alpha + \gamma - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\pi}{3} \right).$$

Но

$$\cos \frac{\alpha - \gamma}{2} < \cos \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\pi}{3} \right),$$

так как

$$\frac{\pi}{2} > \frac{\alpha - \gamma}{2} > \left| \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\pi}{3} \right| \geq 0.$$

Таким образом, неравенство теоремы свелось к очевидному:

$$\begin{aligned} \sin \beta + \sin \left(\alpha + \gamma - \frac{\pi}{3} \right) &= \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \left(\frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \leq 2 \sin \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Подумайте, какое геометрическое предложение (и геометрическое его доказательство!) соответствуют неравенству теоремы и приведенному доказательству ее.

Пусть теперь n — натуральное число, $n > 4$, $n \neq 7$, $n \neq 8$. Построим величины углов α, β, γ треугольника

Δ_n следующим образом. Положим $\alpha = \frac{8\pi}{3n}$, если $n =$

$= 4k$; $\frac{\pi}{3n}$, если $n = 4k + 1$; $\frac{2\pi}{3n}$, если $n = 4k + 2$; $\frac{7\pi}{3n}$, если

$n = 4k + 3$. Поскольку $n > 4$, то все α — величины острых углов; поскольку $n \neq 7$ и $n \neq 8$, то все они

отличны от $\frac{\pi}{3}$. Далее, положим $\beta = \gamma = \frac{\pi - \alpha}{2}$. Легко

видеть, что так определенный треугольник Δ_n при любом рассматриваемом n удовлетворяет равенствам

$$\sin n\alpha = \sin n\beta = \sin n\gamma = \sin \frac{\pi}{3}, \quad \text{откуда} \quad f(n) = 3 \sin \frac{\pi}{3}.$$

С другой стороны, неравенство теоремы дает

$$f(1) < 3 \sin \frac{\pi}{3}. \quad \text{Окончательно: } f(1) < f(n).$$

Замечания

1. С помощью математического анализа нетрудно получить следующее обобщение неравенства теоремы: если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, а n — натуральное число, то

$$|\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma| \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Из решения в) следует, что при любом натуральном

n равенство достигается на некотором треугольнике, причем при $n \neq 3$ — на остроугольном. С другой стороны, для любого остроугольного треугольника справедливо неравенство $|f(3)| < 2$. Усилить это неравенство, заменив 2 меньшей константой, уже нельзя.

2. При $n \geq 3$ доказанные в а) и б) неравенства не могут быть распространены на случай неостроугольного треугольника. Действительно, полагая $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2n}$, получаем:

$$f(n) = 2, \quad f(1) = 2 \sin \frac{\pi}{2n} + \sin \frac{\pi}{n} \leq 2 \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{n} < 2.$$

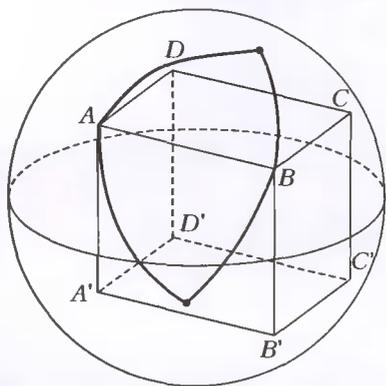
3. Для остроугольных треугольников справедливо неравенство $f(7) \leq f(1)$, однако полученное авторами задачи доказательство этого факта неэлементарно по средствам и довольно сложно. Авторы заранее признательны читателям за нахождение и присылку элементарного доказательства.

С.Маркелов, В.Сендеров

M1900. Можно ли расположить в пространстве 5 одинаковых кубов так, чтобы любые два из них имели общую диагональ, а никакие три нет?

Некоторые 8 вершин правильного додекаэдра образуют куб. Таких кубов в додекаэдр можно вписать пять, и они, очевидно, дают положительный ответ на вопрос задачи. Интересно, что описанная конфигурация является единственно возможной. Приведем идею доказательства.

Если два куба имеют общую диагональ, то их центры совпадают. Следовательно, вершины всех пяти кубов лежат на одной сфере. Зафиксируем один из них — $ABCD A' B' C' D'$. Так как никакие 3 куба не имеют общей диагонали, каждая из 4 диагоналей выбранного куба является диагональю ровно одного из оставшихся кубов. Рассмотрим кубы с диагоналями AC' и BD' . Одна из их общих вершин удалена как от A , так и от B на расстояние AB . Таких точек на сфере две (см. рисунок), выбрав одну из них, мы однозначно опреде-



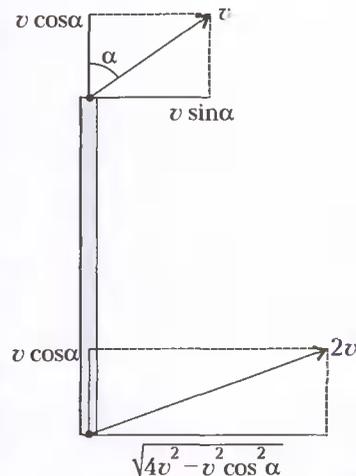
лим вершины еще двух кубов (при этом выбор другой точки даст конфигурацию, симметричную относительно плоскости $ABD' C'$). Аналогично, общая вершина четвертого и пятого кубов является одной из двух точек, удаленных на расстояние AB от C и D . Но только для одной из этих точек четвертый куб будет иметь общую диагональ с уже построенным вторым.

А.Заславский

Ф1908. Жесткий стержень движется по плоскости. В некоторый момент скорость одного из концов стержня равна по величине 1 м/с, скорость второго конца составляет по величине 2 м/с. Какой может быть в этот момент скорость центра стержня?

Скорость центра стержня зависит от углов, составляемых векторами скоростей его концов и стержнем. Поэтому мы можем вычислить только границы, в которых эта скорость находится.

Пусть меньшая из скоростей, равная $v = 1$ м/с, составляет угол α с направлением стержня (см. рисунок). Тогда проекция этой скорости на направление стержня равна $v \cos \alpha$, а перпендикулярная составляющая равна $v \sin \alpha$. Проекция скорости $2v$ второго конца стержня на направление стержня должна быть также равна $v \cos \alpha$, тогда



вторая проекция будет $\sqrt{4v^2 - v^2 \cos^2 \alpha}$. Теперь мы можем записать выражение для скорости центра стержня. Правда, удобнее взять квадрат этой скорости (для анализа на максимум и минимум это не важно, а выражение получится попроще): у нее есть «продольная» составляющая, равная $v \cos \alpha$, и «поперечная», равная полусумме «поперечных» скоростей концов. Выражая для удобства дальнейших вычислений $\cos \alpha$ через $\sin \alpha$, мы получим скорость центра стержня как функцию угла α :

$$\begin{aligned} v_{\text{ц}}^2 &= (v \cos \alpha)^2 + \left(\frac{v \sin \alpha \pm \sqrt{4v^2 - v^2 \cos^2 \alpha}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{v^2}{4} \left(4 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 4 - \cos^2 \alpha \pm 2 \sin \alpha \sqrt{4 - \cos^2 \alpha} \right) = \\ &= \frac{v^2}{4} \left(3 - 3 \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 4 \pm 2 \sin \alpha \sqrt{3 + \sin^2 \alpha} \right) = \\ &= \frac{v^2}{4} \left(7 - 2 \sin^2 \alpha \pm 2 \sin \alpha \sqrt{3 + \sin^2 \alpha} \right). \end{aligned}$$

Найдем производную по углу и убедимся, что она не обращается в ноль ни при каких возможных углах:

$$v_{\text{ц}}^2 = \frac{v^2}{4} \left(7 - 2x^2 \pm 2x\sqrt{3+x^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\text{ц}}^2}{dx} &= \frac{v^2}{4} \left(-4x \pm 2\sqrt{3+x^2} \pm \frac{2x \cdot 2x}{2\sqrt{3+x^2}} \right) = \\ &= \frac{v^2}{4\sqrt{3+x^2}} \left(-4x\sqrt{3+x^2} \pm 6 \pm 4x^2 \right), \end{aligned}$$

(Продолжение см. на с.32)

Ряды

ЧИСЛОВЫМ РЯДОМ НАЗЫВАЕТСЯ БЕСКОНЕЧНАЯ сумма $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, где a_n — некоторая последовательность чисел.

Ряды появились в математике, когда во второй половине XVII века возникла новая наука — математический анализ, и сразу стали одним из мощнейших средств этой науки. Поначалу математики обращались с рядами как с обычными суммами, из-за чего иногда получались весьма парадоксальные результаты.

Рассмотрим ряд $s = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, умножим его на x : $sx = x + x^2 + \dots + x^{n+1} + \dots$, а затем возьмем разность $s - sx = 1$. Отсюда

$$s = \frac{1}{1-x}.$$

Но, например, при $x = -1$ и $x = 2$ получаются очень странные вещи:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}; \quad 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + \dots = -1.$$

Рассмотрим еще один знаменитый ряд — гармонический:

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Для него

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots$$

Вычитая это равенство из предыдущего, имеем

$$\frac{1}{2}s = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

Но $1 > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, ..., т.е.

$$\frac{1}{2}s > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots = \frac{1}{2}s.$$

Итак, $s > s$ — снова противоречие.

Надо заметить, что математиков в XVII и XVIII веках такие парадоксы не смущали, а от нелепостей их спасала интуиция, и они получили огромное количество замечательных результатов, оставив потомкам проведение строгих доказательств.

В частности, еще в XVII веке были известны представления элементарных функций рядами:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{при } x \in \mathbf{R},$$

$\ln(1+x) =$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad \text{при } -1 < x \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{при } x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{при } x \in \mathbf{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arctg x &= x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{при } |x| \leq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \quad \text{при } |x| < 1. \end{aligned}$$

Последняя формула носит название формулы бинома Ньютона. Впрочем, для натурального α она была известна задолго до Ньютона. Его заслуга в том, что он установил эту формулу для любого α .

Несколько позже, в 1715 году, английский математик Брук Тейлор сделал открытие, навсегда вписавшее его имя в историю математики. Он обнаружил, что если $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$, то $c_0 = f(a)$, $c_1 = \frac{f'(a)}{1!}$, ..., $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, ..., т.е. что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Ряд в правой части называется рядом Тейлора с центром в точке $x = a$. В частности, при $a = 0$ ряд Тейлора принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Каждое из ранее выписанных разложений в ряд — результат применения формулы Тейлора к конкретным функциям. Однако рассуждения самого Тейлора не были вполне строгими с нашей современной точки зрения.

Одним из величайших математиков XVIII века был Леонард Эйлер (1707 — 1783). Он виртуозно оперировал с рядами и бесконечными произведениями. Например, он подставил ix вместо x в разложение

экспоненты и получил свою знаменитую формулу

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos x + i \sin x.$$

В частности, $e^{i\pi} = -1$.

Вот еще один шедевр математического гения Эйлера. Зная, что многочлен $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ($a_0 \neq 0$), имеющий корнями числа x_1, x_2, \dots, x_n , раскладывается на множители:

$$p(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right) \left(1 - \frac{x}{x_2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{x_n}\right),$$

он записывает аналогичную формулу для функции $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$, корни которой суть $x = \pm\pi n$, $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \dots$$

Фактически Эйлер рассматривает бесконечный ряд как многочлен бесконечной же степени. Получается тождество

$$\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \dots = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

Затем он раскрывает скобки в левой части и приравнивает коэффициенты при одинаковых степенях. Например, для коэффициентов при x^2 возникает равенство

$$-\frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots\right) = -\frac{1}{6},$$

откуда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Далее Эйлер получает удивительные равенства:

$$1 + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{n^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90},$$

...

$$1 + \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} + \dots + \frac{1}{n^{2k}} + \dots = \frac{2^{2k-1} \pi^{2k}}{(2k)!} B_k,$$

где $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$, ..., B_k, \dots — хорошо известные математикам числа Бернулли. Это положительные рациональные числа, определяемые разложением

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{B_k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Числа Бернулли появляются также в следующих разложениях в ряды:

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \dots$$

$$\dots + \frac{2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots \text{ при } |x| < \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \dots - \frac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1} - \dots$$

при $0 < |x| < \pi$.

Функция

$$\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots + \frac{1}{n^z} + \dots$$

называется дзета-функцией. Она играет огромную роль в теории чисел. Эйлер, как мы видели, вычислил значения дзета-функции при четных значениях z . Однако про числа $\zeta(3), \zeta(5), \dots$ практически ничего неизвестно. Лишь в 1973 году было доказано, что число $\zeta(3)$ иррационально.

Эйлеру принадлежит и разложение дзета-функции в бесконечное произведение:

$$\zeta(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^z}\right) \left(1 - \frac{1}{3^z}\right) \left(1 - \frac{1}{5^z}\right) \dots} = \frac{1}{\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right)}$$

— в знаменателе стоит произведение скобок по простым числам.

Заметим, некоторые из выписанных нами разложений верны при всех x . Таковы ряды для e^x , $\sin x$ и $\cos x$. Другие — лишь в некоторой окрестности нуля.

Например, равенство $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$ справедливо лишь при $-1 < x < 1$. Казалось бы, чем функция $\frac{1}{1+x^2}$ хуже синуса? Причину этого удалось выяснить лишь в начале XIX века, когда возникла теория функций комплексного переменного.

Базу под теорию рядов подвела строгая теория пределов, созданная в трудах Лагранжа, Коши, Больцано, Вейерштрасса и других математиков. Оказалось, что практически все результаты XVII — XVIII веков были верными (некоторые, правда, с определенными ограничениями).

Закончим мы точным определением суммы ряда. Пусть

$$s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

— числовой ряд. Рассмотрим суммы

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Ряд называется сходящимся, если существует предел

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Этот предел и называется суммой ряда. Если предела не существует, ряд называется расходящимся.

А. Егоров

(Начало см. на с.29)

если всюду знак «+», то в скобках получаем

$$6 + 4x^2 - 4x\sqrt{3+x^2} =$$

$$= 6 + (2x)^2 - 2 \cdot 2x\sqrt{3+x^2} + 3 + x^2 - (3+x^2) =$$

$$= 3 - x^2 + (2x - \sqrt{3+x^2})^2 > 0,$$

если же всюду знак «-», то выражение в скобках строго меньше нуля.

Это означает, что максимум и минимум скорости возможны только при «крайних» значениях синуса угла α , т.е. при скорости v , направленной или вдоль стержня, или перпендикулярно ему. Впрочем, до этого можно было додуматься и без всяких вычислений. После этого легко убедиться, что минимальная скорость центра стержня получится при скоростях концов, перпендикулярных (в данный момент) стержню и направленных в противоположные стороны:

$$v_{ц\ min} = 0,5v = 0,5 \text{ м/с}.$$

Максимальная скорость центра соответствует скоростям концов стержня, направленным в одну сторону:

$$v_{ц\ max} = 1,5v = 1,5 \text{ м/с}$$

(легко проверить, что это больше, чем в случае, когда меньшая скорость направлена вдоль стержня).

А.Стержнев

Ф1909. Грузы, массы которых M и $2M$, связаны легкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок. К оси этого блока привязана еще одна нить, она переброшена через неподвижный блок, а к другому ее концу прикреплен третий груз. При какой массе этого груза один из упомянутых трех грузов может оставаться неподвижным после растормаживания системы?

Рассмотрим отдельно условия равновесия каждого из грузов массой $2M$, M и t – неизвестной массы. Получится три различных случая.

Для того чтобы оставался неподвижным груз массой M , необходимо, чтобы сила натяжения привязанной к нему нити была равна Mg . В этом случае для остальных грузов можно записать (рис.1):

$$2Mg - T = 2Ma,$$

$$2T - mg = m \frac{a}{2},$$

или

$$2Mg - Mg = 2Ma,$$

$$2Mg - mg = m \frac{a}{2},$$

откуда получаем

$$a = \frac{g}{2} \text{ и } m = \frac{8}{5}M.$$

Для неподвижности груза массой $2M$ необходимо обеспечить силу натяжения привязанной к нему нити равной $2Mg$. Для остальных грузов получим (рис.2)

$$2Mg - Mg = Ma,$$

$$mg - 4Mg = m \frac{a}{2},$$

откуда

$$a = g \text{ и } m = 8M.$$

Наконец, для неподвижности груза неизвестной массы t нужно, чтобы сила натяжения привязанной к нему нити составляла mg . Для этого случая получится (рис.3)

$$2Mg - \frac{mg}{2} = 2Ma,$$

$$\frac{mg}{2} - Mg = Ma,$$

откуда

$$a = \frac{g}{3} \text{ и } m = \frac{8}{3}M.$$

Итак, из найденных нами ответов следует, что добиться неподвижности сразу каких-нибудь двух грузов (не говоря уже о трех!) не получится.

З.Рафаилов

Ф1910. Порция азота занимает объем $V = 20$ л при давлении $p = 0,5$ атм и температуре $T = 300$ К. С газом производят следующий процесс: ему медленно сообщают количество теплоты $Q = 300$ Дж, при этом температура газа увеличивается на $\Delta T = 10$ К. Сжимался газ или расширялся?

При расширении газ совершает положительную работу, если же работа газа отрицательна – значит, он сжимался. Работу найдем из баланса энергий – первого начала термодинамики:

$$Q = A + \Delta U, \text{ и } A = Q - \Delta U.$$

Для этого посчитаем изменение внутренней энергии азота (азот – двухатомный газ):

$$\Delta U = \nu \cdot \frac{5}{2} R \Delta T = \nu RT \cdot \frac{5}{2} \frac{\Delta T}{T} = pV \cdot \frac{5}{2} \frac{\Delta T}{T} \approx 83 \text{ Дж}.$$

Тогда для работы получим

$$A = Q - \Delta U \approx 217 \text{ Дж}.$$

Видно, что работа газа положительна – следовательно, газ расширялся.

А.Простов

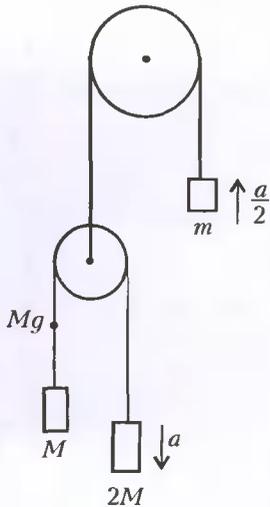


Рис 1

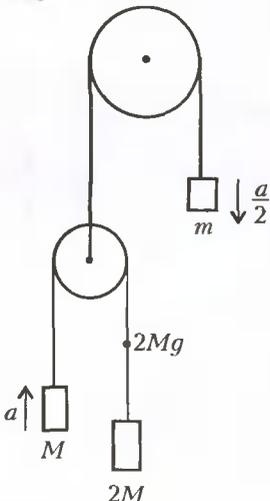


Рис 2

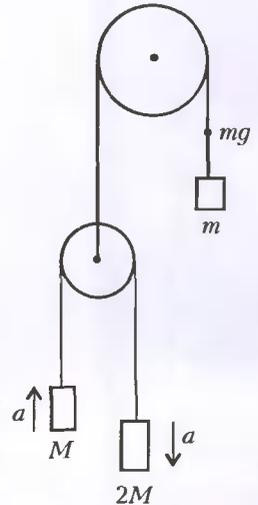


Рис 3

Ф1911. На тороидальный сердечник из материала с большой магнитной проницаемостью намотали катушку с большим числом витков. Катушку подключили к источнику с большим внутренним сопротивлением – через 1 с ток практически перестал меняться и оказался равным 10 мА. На второй точно такой же сердечник намотали еще одну катушку, используя кусок такого же провода, но вдвое большей длины. Катушки соединили параллельно и снова подключили к тому же источнику. Какие токи будут протекать через катушки через 1 с после подключения? Какими станут эти токи через большое время? Катушки расположены так, что магнитное поле одной из них не создает потока через другую. Провод, которым намотаны катушки, имеет малое удельное сопротивление.

Из провода вдвое большей длины получится вдвое больше витков, следовательно, индуктивность второй катушки будет в 4 раза больше, чем первой. (В сердечнике из материала с большой магнитной проницаемостью линии индукции магнитного поля не рассеиваются. При пропускании такого же тока по «большой» катушке магнитная индукция увеличивается вдвое – складываются поля удвоенного числа витков, а магнитный поток увеличивается в 4 раза: в 2 раза за счет поля и еще в 2 раза за счет увеличения суммарной площади витков.)

При параллельном соединении катушек большой индуктивности с очень малым активным сопротивлением токи в катушках распределяются обратно пропорционально индуктивностям – при параллельном соединении одинаковы ЭДС индукции, а значит, и магнитные потоки через катушки. В сумме токи составят те же 10 мА, тогда ток через первую катушку достигнет 8 мА, а через вторую катушку потечет ток 2 мА.

А вот когда токи будут изменяться очень медленно, падения напряжения на сопротивлениях обмоток станут существенными – через большое время токи установятся в отношении, обратном сопротивлениям катушек, т.е. ток через первую станет вдвое больше, чем через вторую. Но в сумме они дают те же 10 мА, поэтому токи в катушках будут равны $20/3$ мА и $10/3$ мА, т.е. примерно 6,7 мА и 3,3 мА.

А.Зильберман

Ф1912. В вашем распоряжении есть резистор сопротивлением 1000 Ом, катушка индуктивностью 1 Гн и конденсатор емкостью 10 мкФ. Источник переменного напряжения частоты 50 Гц имеет амплитуду 1 В. Как нужно соединить элементы цепи, чтобы ток

через резистор был минимально возможным (но не нулевым)? Как нужно их соединить, чтобы ток через резистор был максимальным? Найдите амплитуды этих токов. Элементы цепи считайте идеальными.

Собственная частота контура, составленного из катушки индуктив-

ностью 1 Гн и конденсатора емкостью 10 мкФ, довольно близка к частоте источника и составляет примерно 50,33 Гц – это подсказывает идею получения малого тока через резистор.

Включим резистор последовательно с параллельным LC-контуром, который на частоте, близкой к резонансной, имеет большое сопротивление (рис.1): простой расчет с помощью векторной диаграммы дает для этого сопротивления примерно 25 кОм. Учтем, что это сопротивление «индуктивное» – конденсатор имеет на частоте 50 Гц сопротивление чуть больше, чем катушка

($X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = 318$ Ом против $X_L = \omega L = 2\pi f L = 314$ Ом – числа немного округлены), поэтому ток через катушку чуть больше, а именно разность токов и

вытекает из параллельного контура. Полное сопротивление цепи (резистор сопротивлением 1 кОм и контур с индуктивным сопротивлением 25 кОм) легко посчитать, и получится, что амплитуда тока через резистор будет равна 40 мкА. Это и есть минимально возможный ток через резистор.

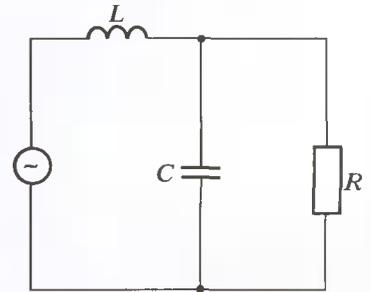


Рис 2

Может показаться, что для получения большого тока выгодно подключить резистор последовательно с конденсатором и катушкой (последовательный LC-контур имеет малое сопротивление). Однако это далеко не самый разумный результат – он даже хуже, чем при прямом подключении резистора к источнику. Но можно сделать и получше (рис.2) – контур из последовательно соединенных конденсатора и катушки подключаем к источнику, а резистор подсоединяем параллельно конденсатору (это чуть лучше, чем параллельно катушке).

Выигрыш получается за счет того, что при таком подключении напряжения катушки и конденсатора получаются больше, чем у источника (без резистора даже во много раз больше – ведь напряжения одинаковы, а их разность равна напряжению источника). Аккуратный расчет при помощи опять же векторной диаграммы (рис.3) дает в этом случае амплитуду тока примерно 3,2 мА. Это – максимально возможный ток через резистор.

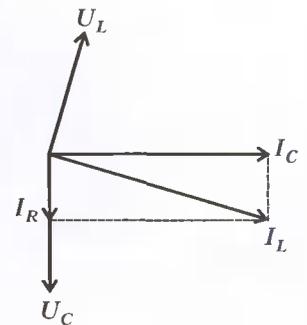


Рис 3

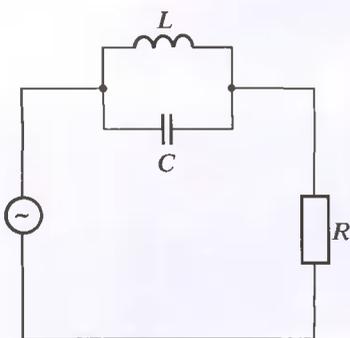


Рис 1

Р.Александров

«Досье» на окружность Аполлония

Г. ФИЛИППОВСКИЙ

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ДРЕВНЕГРЕЧЕСКИЙ МАТЕМАТИК АПОЛЛОНИЙ Пергский (ок. 260 – 170 до н.э.) является автором богатейшего по содержанию труда «Конические сечения», из которого развилась аналитическая геометрия.

Данные же о других его работах, к сожалению, весьма отрывочны, поскольку большинство из них утеряны. Несомненно, однако, что круг геометрических интересов Аполлония, получившего образование в Александрии, был необычайно широк. Он занимался построениями с помощью циркуля и линейки, гармоническим отношением четырех точек прямой, правильными многогранниками и многими другими вопросами геометрии.

По свидетельству Паппа Александрийского, Аполлоний уделял большое внимание геометрии окружностей. Не случайно в школьной геометрии популярны такие его задачи:

- 1) постройте окружность, которая проходит через две данные точки и касается данной прямой;
- 2) постройте окружность, которая касается трех данных окружностей.

Мы же поговорим об *окружности Аполлония* – одном из важных и красивых геометрических мест точек. Покажем,

как с помощью окружности Аполлония эффективно и изящно решается ряд непростых геометрических задач, включая олимпиадные.

Задача 1 (свойство биссектрисы внешнего угла треугольника, или преамбула к окружности Аполлония).

Пусть $AQ = l'$ – биссектриса внешнего угла A в треугольнике ABC (обозначения ясны из рисунка

1). Докажите, что $\frac{CQ}{BQ} = \frac{b}{c}$.

Решение. Поскольку l' – биссектриса внешнего угла, $\angle BAQ = \angle QAT = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$. Проведем $BN \parallel AC$. Тогда и $\angle BNA = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$ (внутренний накрест лежащий с углом $\angle NAT$). Значит, $BN = AB = c$.

Из подобия треугольников CAQ и BNQ имеем: $\frac{AC}{BN} = \frac{CQ}{BQ}$, или $\frac{b}{c} = \frac{CQ}{BQ}$, что и требовалось доказать.

Напомним, что биссектриса внутреннего угла A пересекает сторону BC в точке L , для которой справедливо аналогичное соотношение: $\frac{CL}{LB} = \frac{b}{c}$.

Задача 2 (окружность Аполлония). Найдите геометрическое место точек, расстояния от которых до двух данных точек C и B относятся как $m : n$.

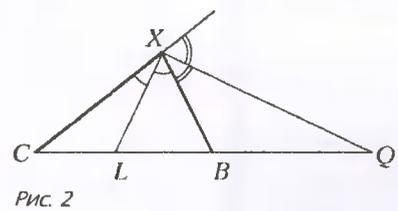


Рис. 2

Решение. Пусть X – одна из точек искомого ГМТ (рис. 2). Соединим ее с B и C . Согласно условию, $\frac{XC}{XB} = \frac{m}{n}$.

Проведем внутреннюю (XL) и внешнюю (XQ) биссектрисы угла X в треугольнике XBC . По свойству внутренней биссектрисы, $\frac{XC}{XB} = \frac{CL}{BL}$. По свойству внешней биссектрисы,

$\frac{XC}{XB} = \frac{CQ}{BQ}$ (см. задачу 1). Следовательно, $\frac{CL}{BL} = \frac{CQ}{BQ} = \frac{m}{n}$.

Поскольку точки B и C заданы, легко находятся точки L и Q , которые делят отрезок BC в отношении $m : n$ внутренним и внешним образом. При этом $\angle LXQ = 90^\circ$ (как угол между биссектрисами смежных углов). Тогда, найдя точки L и Q , на отрезке LQ как на диаметре строим окружность. Это и есть окружность Аполлония.

Докажем, что всякая точка X окружности Аполлония удовлетворяет условию $\frac{XC}{XB} = \frac{m}{n}$.

Проведем через B прямую $KT \parallel XC$ (рис. 3). Из подобия $\triangle CXL$ и

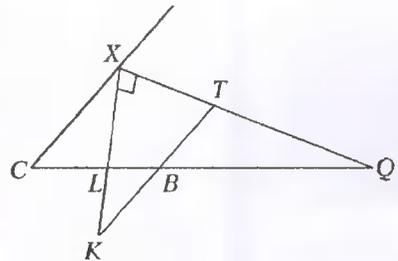


Рис. 3

$\triangle BKL$: $\frac{XC}{BK} = \frac{CL}{BL} = \frac{m}{n}$. Из подобия $\triangle CXQ$ и $\triangle BTQ$:

$\frac{XC}{BT} = \frac{CQ}{BQ} = \frac{m}{n}$. Поскольку $\frac{XC}{BK} = \frac{XC}{BT}$, то $BK = BT$. Но $\triangle KXT$ прямоугольный. Тогда точка B – середина гипотенузы KT . Следовательно, $BK = BT = XB$. Заменяя в равенстве

$\frac{XC}{BK} = \frac{m}{n}$ отрезок BK на XB , получим $\frac{XC}{XB} = \frac{m}{n}$.

Задача 3. Постройте треугольник ABC по $a, h_a, \frac{b}{c}$.

Решение. Строим отрезок $BC = a$ (рис. 4). Поскольку отношение $\frac{b}{c}$ задано, находим точки L и Q . На LQ как на диаметре строим окружность Аполлония. Вершиной A треугольника ABC будет являться любая из точек пересечения окружности Аполлония с прямой, удаленной от BC на расстояние h_a .

Задача 4. Восстановите $\triangle ABC$ по точкам B, C , основанию L биссектрисы угла A и основанию H высоты, проведенной к BC .

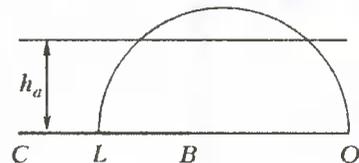


Рис. 4

Решение. Зная точки B, C и L , находим точку Q и строим окружность Аполлония. Из точки H восстанавливаем перпендикуляр к BC , который пересечет окружность Аполлония в точке A . Разумеется, решение существует тогда и только тогда, когда перпендикуляр и окружность пересекаются.

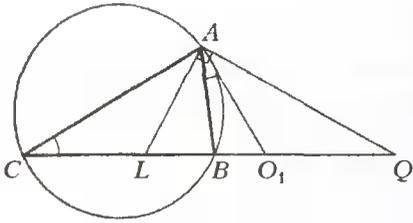


Рис 5

Задача 5. Докажите, что прямая O_1A (где O_1 – центр окружности Аполлония) касается окружности, описанной около $\triangle ABC$.

Решение. Если мы докажем, что $\angle BAO_1 = \angle C$ (рис.5), то это и будет означать, что O_1A касается окружности, описанной около $\triangle ABC$. Действительно, угол ACB является вписанным в эту окружность. И если $\angle BAO_1 = \angle C$, то он является углом между касательной и хордой в этой окружности.

Очевидно, что $O_1A = O_1L = R_A$ (радиус окружности Аполлония), $\angle ALB = 180^\circ - \angle B - \frac{\angle A}{2}$ (из $\triangle ALB$). Тогда и $\angle O_1AL = \angle ALB = 180^\circ - \angle B - \frac{\angle A}{2}$. Найдем $\angle BAO_1$:

$$\begin{aligned} \angle BAO_1 &= \angle O_1AL - \frac{\angle A}{2} = \\ &= 180^\circ - \angle B - \frac{\angle A}{2} - \frac{\angle A}{2} = 180^\circ - \angle B - \angle A = \angle C, \end{aligned}$$

что равносильно требуемому.

Задача 6. На прямой даны четыре точки A, B, C, D в указанном порядке. Постройте такую точку X , из которой отрезки AB, BC и CD видны под равными углами.

Решение. Пусть X – искомая точка (рис.6). Тогда должно выполняться соотношение $\frac{XA}{XC} = \frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$, т.е. точка X принадлежит окружности Аполлония, построенной для точек A, C и

отношения $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$. Аналогично, $\frac{XB}{XD} = \frac{BC}{CD} = \frac{k}{t}$, и точка X принадлежит окружности Аполлония, построенной для точек B, D и отношения $\frac{BC}{CD} = \frac{k}{t}$.

Следовательно, X – точка пересечения двух ГМТ (двух окружностей Аполлония).

Заметим, что эти две окружности могут не пересекаться. В этом случае точки X нет.

Задача 7. На плоскости дан отрезок BC . Найдите множество точек A плоскости таких, что медиана, проведенная из вершины C , равна AB ($m_c = c$).

Решение. По условию, $CM = AB = m_c$ (рис.7). Продлим BC до точки D так, что $CD = BC$. Тогда по теореме Фалеса

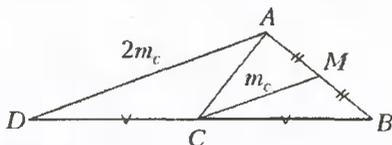


Рис. 7

$AD = 2m_c$. При этом $AB = m_c$. Значит, для отрезка BD необходимо найти геометрическое место точек A таких, что $\frac{AD}{AB} = \frac{2}{1}$. Остается построить окружность Аполлония для отрезка BD и отношения 2:1.

Задача 8. Треугольник ABC вписан в окружность. Постройте на окружности такую точку D , чтобы выполнялось равенство $AC \cdot CD = AB \cdot BD$.

Решение. Искомая точка D обладает тем свойством, что $\frac{BD}{CD} = \frac{AC}{AB}$, где отношение $\frac{AC}{AB} = \frac{m}{n}$ известно. Тогда найдем точки L и Q (рис.8) для отрезка BC такие, что $\frac{CL}{BL} = \frac{CQ}{BQ} = \frac{m}{n}$. На LQ как на диаметре строим окружность Аполлония, которая пересечет данную окружность в точках D и D_1 .

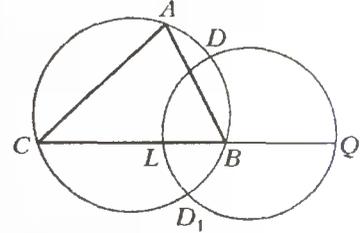


Рис 8

Задача 9. Точки B и C лежат на диаметре данной окружности. Проведите через них две равные хорды, имеющие общее начало.

Решение. Пусть B и C – данные точки на диаметре, X – общее начало двух равных хорд XK и XT (рис.9). Чтобы XK и XT были равны, они должны быть равноудалены от центра окружности ($OE = OF$). Из равенства треугольников XEO и XFO следует, что $\angle 1 = \angle 2$. Тогда XO – биссектриса в треугольнике XBC , и

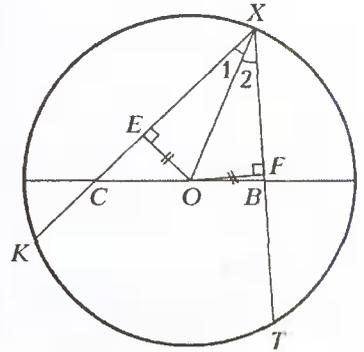


Рис 9

$\frac{XC}{XB} = \frac{CO}{BO}$. Поскольку точки C, O, B заданы, то задано и отношение $\frac{CO}{BO} = \frac{m}{n}$. Становится очевидным, что X – это точка пересечения соответствующей окружности Аполлония с данной окружностью.

Задача 10. На плоскости даны два отрезка AB и CD . Найдите точку X такую, что $\angle AXB = \angle CXD$, причем $\triangle AXB$ подобен $\triangle DXC$.

Решение. Пусть X – искомая точка (рис.10). Тогда из подобия треугольников имеем $\frac{CX}{BX} = \frac{DX}{AX} = \frac{CD}{AB} = \frac{m}{n}$. Построим две окружности Аполлония: первую – для точек B, C и отношения $\frac{CX}{BX} = \frac{m}{n}$; вторую – для точек A, D и отношения $\frac{DX}{AX} = \frac{m}{n}$. Искомой точкой X будет точка пересечения этих двух окружностей.

Рис 10

Задача 11. На стороне прямого угла N даны две точки A и B (рис.11). Найдите на другой стороне угла такую точку C , чтобы $\angle ACB = 2\angle BCN$.

Решение. Согласно условию, точка C должна быть такой, чтобы $\angle BCN = x$ и $\angle ACB = 2x$. Отразим точку B симметрично относительно вершины N прямого угла – получим точку B_1 ; очевидно, что $\angle B_1CB = 2x$. Тогда отрезок BC

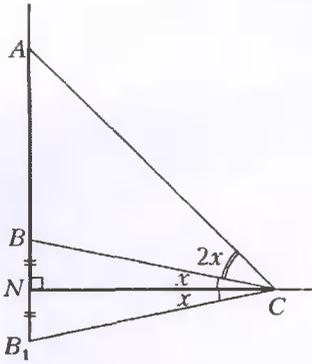


Рис. 11

должен быть биссектрисой угла ACB_1 . При этом поскольку есть точки A, B, B_1 , то есть и отношение $\frac{AB}{BB_1} = \frac{m}{n}$. Для отрезка AB_1 и отношения $\frac{m}{n}$ строим окружность Аполлония, которая пересечет вторую сторону угла в искомой точке C .

Окружностью Аполлония треугольника ABC назовем окружность, построенную как

на диаметре на отрезке LQ . Всего существует три окружности Аполлония (по числу сторон).

Задача 12. В треугольнике ABC дан центр вписанной окружности I . При помощи одной линейки постройте отрезок, равный диаметру одной из окружностей Аполлония.

Решение. Сначала докажем, что прямая L_2L_3 пересечет продолжение BC именно в точке Q . Пока же обозначим точку пересечения прямых L_2L_3 и BC через T (рис. 12). По теореме

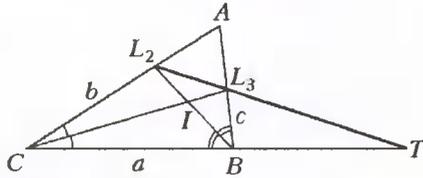


Рис. 12

Менелая для $\triangle ABC$ и секущей L_2L_3 имеем: $\frac{AL_3}{L_3B} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CL_2}{L_2A} = 1$.

А по свойству внутренней биссектрисы $\frac{AL_3}{L_3B} = \frac{b}{a}$ и $\frac{CL_2}{L_2A} = \frac{a}{c}$.

Тогда $\frac{b}{a} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{a}{c} = 1$, и $\frac{CT}{BT} = \frac{b}{c}$. Но и $\frac{CQ}{BQ} = \frac{b}{c}$. Это и означает, что T совпадает с Q .

Теперь решение самой задачи не составит труда.

Продлеваем AI до пересечения с BC — получаем точку L_1 , аналогично получаем точки L_2 и L_3 (рис. 13). Прямая L_2L_3

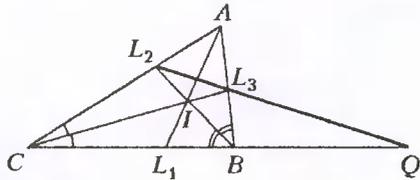


Рис. 13

пересечет продолжение BC в точке Q . Тогда L_1Q — искомый диаметр.

Задача 13. Постройте четырехугольник $ABCD$ с равными и перпендикулярными диагоналями по заданным трем его сторонам: $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$.

Решение. Опишем около искомого четырехугольника $ABCD$ квадрат $EFGH$ (рис. 14).

Анализ показывает, что если K — точка пересечения диагоналей искомого четырехугольника, то очевидно, что $EK = AB = a$, $KF = BC = b$ и $KG = CD = c$.

Тогда берем произвольный квадрат $E_1F_1G_1H_1$. Для отрезка E_1F_1 и отношения $\frac{a}{b}$ строим окружность Аполлония.

Для отрезка F_1G_1 и отношения $\frac{c}{b}$ строим еще одну окружность Аполлония. Две эти окружности пересекутся в точках K_1 и K_2 . Проведя через K_1 две прямые параллельно сторонам квадрата, получим четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$.

Воспользовавшись подобием, нетрудно теперь построить искомый четырехугольник $ABCD$. Аналогичное построение выполняется для точки K_2 .

Задача имеет 2 решения.

Задача 14. Докажите, что общая хорда описанной около $\triangle ABC$ окружности и окружности Аполлония лежит на прямой, симметричной медиане относительно биссектрисы. Такая прямая называется симедианой этого треугольника.

Решение. На рисунке 15 $AN_1 = t$ — отрезок одной из симедиан в $\triangle ABC$.

Основное свойство симедианы: $\frac{CN_1}{BN_1} = \frac{b^2}{c^2}$ (докажите его самостоятельно).

Вернемся к задаче. Пусть описанная около $\triangle ABC$ окружность и окружность Аполлония с диаметром L_1Q пересекаются по хорде AT (рис. 16).

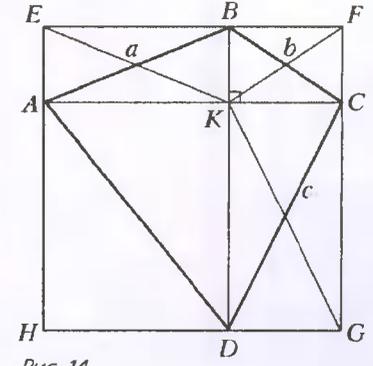


Рис. 14

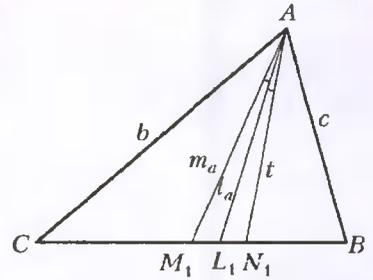


Рис. 15

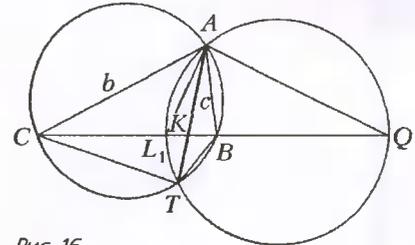


Рис. 16

Треугольники ABK и CTK подобны (по двум углам). Тогда

$$\frac{CK}{AK} = \frac{CT}{c}$$

Треугольники ACK и BTK тоже подобны, и

$$\frac{BK}{AK} = \frac{BT}{b}$$

Разделим первое равенство на второе и получим

$$\frac{CK}{BK} = \frac{b}{BT} \cdot \frac{CT}{c} = \frac{CT}{BT} \cdot \frac{b}{c}$$

Но $\frac{CT}{BT} = \frac{b}{c}$ (поскольку окружность Аполлония есть геометрическое место точек, расстояние от которых до данных точек C и B относятся как $\frac{b}{c}$. При этом точка T принадлежит окружности Аполлония). Тогда $\frac{CK}{BK} = \frac{b^2}{c^2}$. А это означает, что K совпадает с N_1 и хорда AT совпадает с симедианой

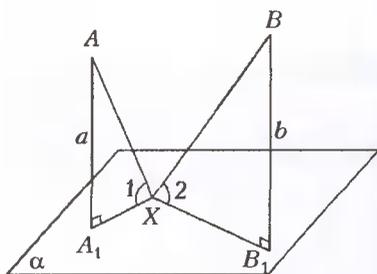


Рис. 17

Задача 15. Найдите геометрическое место точек плоскости, обладающее тем свойством, что прямые, соединяющие их с двумя точками вне плоскости, одинаково наклонены к плоскости.

Решение. Пусть A и B — точки, лежащие вне данной плоскости α (рис. 17). Пусть также

точки A_1 и B_1 — проекции точек A и B на плоскость α , $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.

Если точка X принадлежит искомому ГМТ, то $\angle 1 = \angle 2$.

Значит, $\triangle AXA_1$ подобен $\triangle BXB_1$. Тогда $\frac{A_1X}{B_1X} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{a}{b}$. И наоборот, если отношение расстояний от некоторой точки X плоскости α до точек A_1 и B_1 равно $\frac{a}{b}$, то эта точка принадлежит искомому множеству (в этом случае $\triangle AXA_1$ подобен $\triangle BXB_1$ и $\angle 1 = \angle 2$).

Значит, нам остается найти множество точек X на плоскости α , для которых $\frac{A_1X}{B_1X} = \frac{a}{b}$.

Следовательно, искомым множеством является окружность Аполлония, построенная для точек A_1 и B_1 (проекций точек

A и B) при отношении $\frac{A_1X}{B_1X} = \frac{a}{b}$.

Задача 16. В точках A и B посреди океана находятся два корабля. Они начинают двигаться прямолинейно и равномерно в неизвестных направлениях со скоростями 20 км/ч и 15 км/ч, пока не встречаются в точке C . Каково наибольшее возможное время их движения до встречи, если $AB = 50$ км?

Решение. Поскольку отношение скоростей кораблей равно 4 : 3, то строим точки K и C_2 , которые делят AB в отношении 4 : 3 внутренним и внешним образом, и проводим окружность Аполлония (рис. 18). Очевидно, что точка C_2 окружности Аполлония будет искомой, когда время движе-

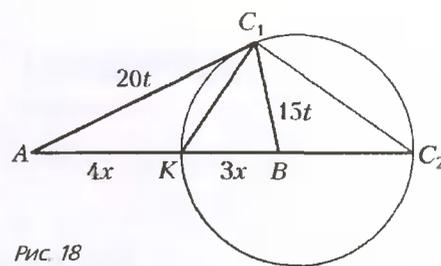


Рис. 18

ния кораблей максимально: $\frac{AC_2}{BC_2} = \frac{4}{3}$, или $\frac{50 + BC_2}{BC_2} = \frac{4}{3}$,

откуда $BC_2 = 150$ (км). Тогда для корабля, находящегося в точке B , имеем: $15 t_{\max} = 150$, и $t_{\max} = 10$ (часов).

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Постройте $\triangle ABC$, если известна длина биссектрисы AL_1 , а также длины отрезков CL_1 и BL_1 , на которые она делит противоположную сторону.

2. Дан $\triangle ABC$. Касательная к описанной около него окружности в точке A пересекает продолжение BC в точке K , $AK = k$. Известна также длина внешней биссектрисы $AQ = n$. Найдите длину внутренней биссектрисы AL_1 .

3. Найдите радиус окружности Аполлония треугольника ABC , если $CL_1 = m$, $BL_1 = n$.

4. Три точки A , B и C расположены на одной прямой (B — между A и C). Возьмем произвольную окружность с центром B и обозначим через M точку пересечения касательных, проведенных из A и C к этой окружности. Найдите геометрическое место точек M .

5. Докажите, что три окружности Аполлония треугольника ABC пересекаются в двух точках F_1 и F_2 и что прямая F_1F_2 проходит через центр окружности, описанной около $\triangle ABC$. (Точки F_1 и F_2 называются точками Аполлония треугольника ABC .)

Катушка, вращающаяся в магнитном поле

(Начало см. на с.17)

ции, которая за оборот один раз меняет свое направление, и она тем больше по величине, чем выше скорость вращения и значительнее индукция магнитного поля.

Если выводы катушки подключить не к светодиодам, а к коллектору из двух колец и двух щеток, то на выводах такого коллектора, очевидно, появится переменное напряжение синусоидальной формы. Иными словами, вращающаяся в постоянном магнитном поле катушка с соответствующим коллектором является электрическим генератором переменного тока. Сделав коллектор из двух полуколец, расположенных подобно светящимся дугам, получаем электрический генератор постоянного (пульсирующего) тока.

Задания для самостоятельного исследования

1. Разработайте компьютерную программу, обеспечивающую построение в полярной системе координат графика зависимости ЭДС индукции от угла поворота витка в постоянном магнитном поле. На компьютерной модели исследуйте эту зависимость при различных значениях скорости вращения витка и индукции магнитного поля.

2. Исследуйте вращение катушки в переменном магнитном поле, используя компьютерный и натуральный эксперименты. Для последнего вместо постоянного магнита нужно взять электромагнит, подключенный к источнику переменного тока. Подойдут имеющиеся в школьном физическом кабинете дроссельная катушка со стальным сердечником и блок питания В-24.

3. Разработайте компьютерную модель описанного в статье прибора, обеспечивающую построение разноцветных дуг, подобных тем, которые высвечивают светодиоды. Выполните серию компьютерных экспериментов, изменяя скорость вращения катушки и частоту магнитного поля. Сопоставьте результаты модельных и натуральных экспериментов.

Магнитный поток сверхпроводника

М. ЛИВШИЦ

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЕ ЯВЛЕНИЕ, ИМЕЮЩЕЕ КАК МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ, ТАК И МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ЧЕРТЫ. ОКАЗЫВАЕТСЯ, ЧТО НЕКОТОРЫЕ ИЗ НИХ МОЖНО ВЫЯСНИТЬ, ПРАКТИЧЕСКИ НЕ ПРИБЕГАЯ К АППАРАТУ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ. В ЧАСТНОСТИ, ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ КВАНТОВОГО ХАРАКТЕРА МАГНИТНОГО ПОТОКА СВЕРХПРОВОДНИКА ДОСТАТОЧНО ВОСПОЛЬЗОВАТЬСЯ ОДНОЙ ГЕНИАЛЬНО ПРОСТОЙ ТЕОРЕМОЙ – ТЕОРЕМОЙ ЭРЕНФЕСТА ОБ АДИАБАТИЧЕСКИХ ИНВАРИАНТАХ. В СВОЕ ВРЕМЯ, ЕЩЕ ДО СОЗДАНИЯ АППАРАТА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ, ОНА СЫГРАЛА БОЛЬШУЮ РОЛЬ В ТЕОРИИ КВАНТОВ, И О НЕЙ РЕЧЬ ПОЙДЕТ ВПЕРЕДИ. НО ПРЕЖДЕ ПОСТАРАЕМСЯ УВИДЕТЬ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СВЕРХПРОВОДНИКА НА ПРИМЕРЕ СЛЕДУЮЩЕЙ ЗАДАЧИ.

Пусть имеются два замкнутых сверхпроводящих витка с токами. Начнем достаточно медленно (смысл этих слов станет ясным чуть позже) сближать эти витки. Нас будет интересовать изменение (взаимосвязанное) магнитного поля и электрических токов в витках в процессе их сближения.

Решить эту задачу можно, используя только закон Ома, но для этого следует в формулу $IR = \mathcal{E}$, справедливую для постоянного тока в замкнутой цепи, включить еще ЭДС электромагнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея гласит, что ЭДС \mathcal{E}_n , индуцируемая в контуре, находящемся в изменяющемся магнитном потоке Φ , численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром:

$$\mathcal{E}_n = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Целесообразно различать магнитный поток Φ_c , создаваемый собственным током контура, и внешний магнитный поток $\Phi_{\text{вн}}$, создаваемый всеми другими токами в этом же контуре:

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_{\text{вн}}.$$

В соответствии с этим, и ЭДС индукции \mathcal{E}_n оказывается состоящей из двух частей: ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_{\text{ис}} = -\Delta\Phi_c/\Delta t$ и ЭДС взаимной индукции $\mathcal{E}_{\text{и в н}} = -\Delta\Phi_{\text{вн}}/\Delta t$. Таким образом, для рассматриваемой задачи можно записать закон Ома в таком виде:

$$iR = \mathcal{E} - \frac{\Delta\Phi_c}{\Delta t} - \frac{\Delta\Phi_{\text{вн}}}{\Delta t}, \quad (1)$$

где буквой i обозначена величина изменяющегося со временем тока.

Теперь проанализируем условия поставленной задачи.

Во-первых, выясним физический смысл слов «достаточно медленное» сближение витков (медленное – по сравнению с чем?). Оказывается, именно это условие определяет саму возможность применения в задаче закона Ома, поскольку он справедлив только для стационарных (постоянный ток) или переменных, но квазистационарных электрических процессов. Например, квазистационарным оказывается переменный ток частотой 50 Гц, используемый обычно в бытовых электрических цепях. А вот переменный ток высокой частоты, с которым часто приходится иметь дело при проведении физических экспериментов в электрических установках на лабораторном столе, уже нельзя считать квазистационарным. В чем тут дело?

Закон Ома утверждает, что падение напряжения, равное произведению силы тока на сопротивление всей цепи, равно сумме всех ЭДС. Однако физической причиной тока, т.е. упорядоченного перемещения электрических зарядов в замкнутой цепи, является не непосредственно ЭДС, а создаваемая и поддерживаемая этой ЭДС напряженность электрического поля, действующего на электрические заряды в каждой точке проводника. Чтобы напряженность поля в данный момент во всех точках цепи определялась величиной ЭДС в тот же момент, размеры (длина) контура тока должны быть такими, чтобы время распространения электромагнитного поля вдоль него было много меньше времени, необходимого для заметного изменения величины ЭДС.

Для наглядности подсчитаем, как выполняется условие квазистационарности для переменного тока частотой $f = 50$ Гц в замкнутом контуре, включающем в себя районную электрическую подстанцию и электрическую сеть длиной $l = 15$ км. Электромагнитное поле, как известно, распространяется со скоростью света $c = 300000$ км/с. Поэтому искомое время установления тока оказывается равным $\tau = l/c = 5 \cdot 10^{-5}$ с. А время изменения ЭДС электростанции от нуля до максимума составляет $T/4 = 1/(4f) = 5 \cdot 10^{-3}$ с, где T – период ЭДС. Таким образом, за время τ ЭДС успевает измениться всего на 1% своей максимальной величины.

Во-вторых, обсудим, к чему приводит сверхпроводимость витков. Напомним, что явление сверхпроводимости наступает у целого ряда металлов и их сплавов обычно при температуре, близкой к абсолютному нулю. Основная черта этого явления – резкое (скачкообразное) уменьшение (практически до нуля) сопротивления проводника при соответствующей температуре. В результате ток в сверхпроводящем контуре без источников тока не уменьшается в течение длительного времени (что обнаруживается путем измерения магнитного поля тока).

Таким образом, в нашей задаче надо положить $R = 0$ и исключить из формулы, выражающей закон Ома, ЭДС источника \mathcal{E} – иначе (из-за $R = 0$) уже в неподвижном витке сила тока будет неограниченно возрастать. Тогда для витков 1 и 2 уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_{12}}{\Delta t} = 0,$$

$$\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_{21}}{\Delta t} = 0,$$

где Φ_1 и Φ_2 – собственные магнитные потоки контуров, Φ_{12} – поток второго контура через первый, Φ_{21} – поток первого контура через второй. Умножение на Δt дает

$$\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_{12} = 0, \quad \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_{21} = 0,$$

или

$$\Delta(\Phi_1 + \Phi_{12}) = 0, \quad \Delta(\Phi_2 + \Phi_{21}) = 0.$$

Отсюда получаем

$$\Phi_1 + \Phi_{12} = \text{const}, \quad \Phi_2 + \Phi_{21} = \text{const}. \quad (2)$$

Итак, в процессе сближения витков сохраняется величина полного магнитного потока, связанного с каждым контуром.

Из этого, самого по себе важного результата, можно получить еще более удивительное следствие, если воспользоваться теоремой об адиабатических инвариантах, установленной замечательным физиком-теоретиком Паулем Эренфестом. Чтобы понять содержание этой теоремы, фактически достаточно понять тот простой смысл, который заключен в кажущихся таинственными словами «адиабатические инварианты». Под *адиабатическим* процессом (в теореме Эренфеста) понимается изменение внешних условий или внутренних параметров системы, происходящее очень медленно по сравнению со временем установления ее состояния τ (о котором уже говорилось раньше). *Инвариантами* называют величины, остающиеся неизменными при тех или иных преобразованиях. (Например, при переходе от одной системы координат к другой путем поворота осей или сдвига начала координат инвариантом является длина отрезка.)

После этих пояснений теорему Эренфеста можно сформулировать следующим образом:

Если некоторая физическая величина является адиабатическим инвариантом, т.е. сохраняет свое значение при достаточно медленном протекании процесса, то она квантуется, или, иными словами, принимает только дискретные значения.

Физический смысл теоремы совершенно прозрачен: поскольку изменение некоторой величины, если она квантованная, может происходить только скачком, кратным величине ее кванта, эта величина при адиабатическом процессе «вынуждена» оставаться постоянной, ибо до скачка дело не доходит.

Применительно к нашей задаче о витках теорема Эренфеста приводит к такому следствию: поскольку магнитный поток в процессе достаточно медленного сближения сверхпроводящих витков с током остается постоянным, он должен быть квантовой величиной!

Братья Х. и Ф. Лондоны, исходя уже из чисто квантово-механических соображений, о которых здесь говорить неуместно, предсказали, что магнитный поток сквозь сверхпроводящее кольцо должен быть квантовой величиной, кратной квантово-механической константе $2\pi\hbar/q$:

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar}{q} n.$$

Здесь \hbar – постоянная Планка ($\hbar = h/(2\pi)$), а под q понимается величина заряда носителя тока в сверхпроводнике. Из теории сверхпроводимости следует, что $q = 2e$, где e – заряд электрона. Вычисления дают для кванта магнитного потока такое значение:

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar}{e} \approx 2 \cdot 10^{-15} \text{ Вб}.$$

Таким образом, магнитный поток, пронизывающий сверхпроводящее кольцо, может быть или нулем, или $\pi\hbar/e$, или $2\pi\hbar/e$ и т.д., но не промежуточным числом.

Итак, мы оказались в состоянии из простых классических представлений, лишь прибавив к ним теорему Эренфеста, получить квантово-механический вывод о квантовом

характере магнитного потока, сцепленного со сверхпроводящим контуром. Правда, количественные выражения мы уже позаимствовали из самой квантовой механики.

А что же происходит в рассматриваемой задаче с энергией магнитного поля?

На поверхностный взгляд может показаться, что, поскольку не меняется магнитный поток, не должна меняться и энергия магнитного поля. Однако на самом деле в условиях задачи энергия поля будет меняться. По правилу Ленца, возникающий при сближении витков индукционный ток в каждом из них направлен так, чтобы витки отталкивались. Следовательно, для их сближения необходимо совершать работу против сил магнитного поля, которая полностью превращается в его энергию – ведь в сверхпроводящих витках (т.е. при $R = 0$) энергия не переходит в тепло, а кинетической энергией витков можно пренебречь из-за очень медленного сближения.

Интересно все же проверить это утверждение прямым расчетом. Для этого решим упрощенный вариант задачи о сверхпроводящих витках, что позволит также кое-что узнать и кое-что новое.

Пусть имеются два одинаковых недеформируемых круговых витка, расположенных первоначально так, как показано на рисунке 1. По витку 1 идет ток i_0 , а в витке 2,

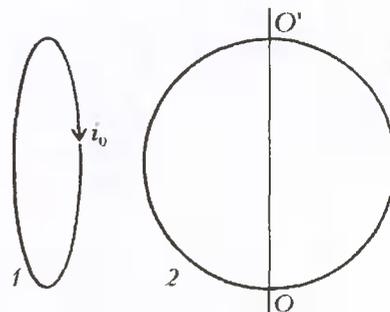


Рис. 1

плоскость которого перпендикулярна плоскости витка 1, тока нет. Повернем виток 2 на 90° вокруг оси OO' так, чтобы плоскости обоих витков стали параллельными, и начнем их сближать. Согласно требованиям теоремы Эренфеста, все эти процессы (как и в общей задаче) совершаются адиабатически. Воспользуемся полученным ранее решением общей задачи (формула (2)), учитывая следующие упрощения.

1) Контур – недеформируемый и среда – неферромагнитная (нет железных сердечников). Поэтому между величиной тока в контуре и создаваемым им магнитным полем существует простая связь: при изменении силы тока пропорционально ему изменяется величина вектора магнитной индукции во всех точках, а значит, и величина магнитного потока через контур, т.е.

$$\Phi_c = Li_c, \quad \Phi_{вн} = Mi_{вн},$$

где L – коэффициент самоиндукции, M – коэффициент взаимной индукции.

2) Поскольку витки одинаковые, коэффициенты самоиндукции витков равны: $L_1 = L_2 = L$. Аналогичное справедливо и для коэффициентов взаимной индукции: $M_{12} = M_{21} = M$. Но при сближении витков величина M , в отличие от L , изменяется, причем всегда $M < L$: магнитный поток от тока в данном контуре всегда больше, чем магнитный поток от него через другой контур.

3) В соответствии с начальными условиями,

$$\Phi_1(0) = Li_0, \quad \Phi_2(0) = 0.$$

После учета всех трех упрощений формула (2) принимает вид

$$Li_1 + Mi_2 = Li_0, \quad Li_2 + Mi_1 = 0.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$i_1 = \frac{L^2}{L^2 - M^2} i_0, \quad i_2 = -\frac{LM}{L^2 - M^2} i_0.$$

То, что $i_2 < 0$, является следствием правила Ленца: поток во втором контуре должен сохраняться равным нулю. По мере сближения контуров $M \rightarrow L$, $L^2 - M^2 \rightarrow 0$ и оба тока неограниченно (1) возрастают.

Примерная картина магнитных линий (рис.2), отражающих характер магнитного потока, позволяет понять (точ-

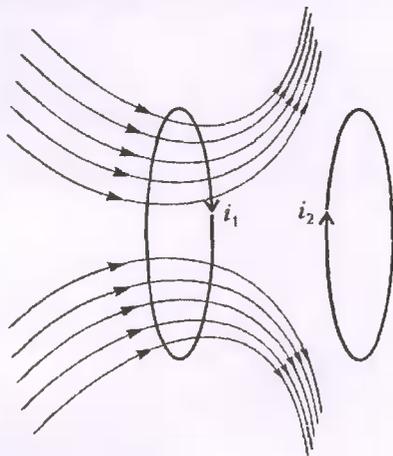


Рис. 2

нее – почувствовать), почему энергия магнитного поля при сближении витков увеличивается. Действительно, наиболее интенсивная часть поля (справа от витка 1) сосредотачивается во все меньшем объеме, и магнитная индукция B соответственно возрастает, так как величина потока сохраняется. Поскольку плотность энергии пропорциональна не B , а B^2 , энергия также будет возрастать. Например, если площадь, пронизываемая магнитными линиями, уменьша-

ется в 10 раз, B возрастает тоже в 10 раз, а B^2 – уже в 100 раз, т.е. в уменьшенном объеме будет сосредоточена в 10 раз большая энергия, чем первоначальная.

Прямой количественный подсчет (не по картинке) можно провести, если воспользоваться выведенной в электротехнике формулой для энергии W магнитного поля двух связанных контуров:

$$W = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} + M i_1 i_2.$$

Подставляя полученные выше значения величин токов, окончательно получаем

$$W = \frac{L^3 i_0^2}{2(L^2 - M^2)},$$

что и подтверждает рост энергии поля по мере сближения витков.

Итак, что же мы дополнительно узнали, решая упрощенный вариант нашей задачи?

Прежде всего, выяснился механизм постоянства величины магнитного потока сквозь сверхпроводящий виток. Это постоянство оказалось динамическим равновесием – увеличение внешнего потока через данный контур все время компенсируется увеличением противоположно направленного собственного потока. Так обстоит дело для обоих витков: в условиях их сверхпроводимости и адиабатичности процесса их сближения противоположная направленность приращений токов, следующая из правила Ленца, приводит к точному (до кванта!) количественному балансу противоположно направленных приращений составляющих магнитного потока. Вот так это выглядит с позиций классической физики.

Кроме того, в отличие от магнитного потока, энергия магнитного поля не квантуется, так как не является адиабатическим инвариантом. Напомним, что работа равна скалярному произведению силы на перемещение, независимо от времени прохождения этого пути. Поэтому при любом сколь угодно медленном перемещении витков обязательно совершается работа против сил их отталкивания, и энергия магнитного поля непрерывно растет.

ИНФОРМАЦИЯ

Школьные Харитоновские чтения

Вот уже в четвертый раз в городе Сарове Нижегородской области – там, где находится ядерный центр России, – состоялась научная конференция школьников. В этом году чтения были приурочены к столетию со дня рождения патриарха ядерной науки Юлиа Борисовича Харитона. Под руководством академика Харитона решались не только конкретные научные, технологические, организационные задачи по созданию ядерного щита России, он также постоянно заботился и о повышении научного потенциала молодых исследователей, о пополнении их рядов и воспитании у молодежи стремления постоянно узнавать и создавать что-то новое.

На конференцию съехались около 250 учащихся со всей России; участвовали также делегации школьников из Украины и Финляндии. Тематика конференции по традиции

была довольно широкой. Ее работа была организована по секциям: математики (19 докладов), информатики (11), физики (32), химии (7), биологии и экологии (43), литературоведения (29), языкознания (21), западной филологии (70), истории и обществознания (59), гуманитарных исследований (9).

Математическая секция работала в течение одного дня. Лауреатом этой секции стал учащийся московской школы им. А.Н. Колмогорова (СУНЦ МГУ) Армен Бекларян. В своем докладе он рассказал о решении одной довольно старой задачи об оценке площади так называемого медианного четырехугольника. Медианный четырехугольник – это тот, который получается после соединения вершин исходного четырехугольника с серединами противоположных сторон при выбранном направлении обхода вершин. Отношение площадей исходного и медианного четырехугольников (после соответствующих преобразований плоскости, не меняю-

щих это отношение) удастся выписать аналитически, но даже запись этого алгебраического выражения чрезвычайно громоздка. При помощи довольно остроумных приемов Армену удалось найти минимальное и максимальное значения этого выражения, поставив, тем самым, точку в задаче, берущей свое начало с древнейших времен. При выполнении работы автор широко использовал компьютерные среды «Mathematica-4» и «Живая геометрия», и это позволило ему на пленарном заседании в большой аудитории перед самым закрытием конференции красочно рассказать всем «физикам и лирикам» о своей работе. Любопытно, что незадолго до конференции проявились еще две попытки решения этой задачи (см., например, [http://www/ms.uky.edu](http://www.ms.uky.edu)), но обе оказались неудачными (в чем автору, конечно, также пришлось убедиться).

Второе место присуждено *Дмитрию Пикулину*, ученику лицея 15 города Сарова. В его докладе была сделана попытка выделения одного класса комбинаторных задач, в основе решения которых лежат идеи усреднения и асимптотического поведения. В качестве основы доклада были выбраны задачи, которые использовались при подготовке команды России для участия в международной олимпиаде школьников и в период летней математической школы-2003, которая работала в Сарове.

На третьем месте оказался десятиклассник *Никита Однородков* (СУНЦ МГУ). Его доклад «Окружности на плоских решетках» вызвал неподдельный интерес самой постановкой темы исследования. Им доказана, в частности, такая теорема: *Для каждого правильного паркета на плоскости и заданного натурального числа n существуют открытые круги и окружности, содержащие ровно n узлов решетки.* Таких паркетов (разбиений плоскости на правильные многоугольники) три, и составлены они из квадратов, треугольников и шестиугольников.

Кроме того, жюри отметило доклад десятиклассника *Дмитрия Веселина* (СУНЦ МГУ) «Дискретные гармонические функции».

На пленарном заседании (кроме А.Бекларяна) выступили *Артем Жорин* (Саров, лицей 15, 7 кл.) с докладом «Тестирующая система» и *Кирилл Поваров* (Саров, лицей 15, 11 кл.) с докладом «Философия здравого смысла как нравственная несостоятельность цивилизованного общества (по повести А. и Б.Стругацких «Второе нашествие марсиан»).

Трудно удержаться, чтобы не перечислить названия докладов лауреатов конференции по другим секциям:

Роман Белов, Павел Ступников (Санкт-Петербург, лицей «ФТШ», 11 кл.), «Создание объектного инструментария для моделирования систем, описываемых двухчастотными и многочастотными потенциалами»;

Анатолий Береговой (Саров, школа 5, 11 кл.), «Реализация криптографических алгоритмов RIJDAEL, RSA, MDS для применения в гипотетической платежной системе»;

Кирилл Поваров (Саров, лицей 15, 11 кл.), «Создание оптимальной системы связи типа «струнный телефон»;

Алексей Сафронов (Саров, лицей 15, 11 кл.), «Соскальзывание цепочки с горизонтальной плоскости»;

Яков Шаповалов (Саров, лицей 15, 11 кл.), «Скин-эффект»;

Лариса Шубина (Саров, лицей 15, 11 кл.), «Разработка технологии получения устойчивых мыльных пузырей в газодинамическом эксперименте»;

Анастасия Баранова, Наталья Салтанова (Кемерово, МНОУ «Лицей», 11 кл.), «Изучение условий получения аналитического сигнала при взаимодействии пероксонитрита с хромотроповой кислотой»;

Анна Костюкова, Анатолий Гордеев (Саров, МОУДОД СЮН, 11 и 9 кл.), «Изучение пресноводных моллюсков Мордовского государственного заповедника им.П.Г.Смидовича и ЗАТО г.Сарова»;

Алексей Перенков (Саров, МОУДОД СЮН, 11 кл.), «Применение биоиндикационных методов с использованием результатов физико-химических исследований для мониторинга водоемов г.Сарова и Мордовского государственного заповедника им.П.Г.Смидовича»;

Полина Сарамотина (Кемерово, МНОУ «Лицей», 11 кл.), «Проблема соотношения части и целого в лирическом цикле (на примере цикла Н.Гумилева «Романтические цветы» и стихотворения «Сонет»)»;

Дарья Шмелева (Нижний Новгород, гимназия 13, 11 кл.), «Жанровые особенности святочной литературы на примере рассказов Н.С.Лескова «Зверь» и «Неразменный рубль»;

Марина Мешкова (Саров, гимназия 2, 11 кл.), «Компьютерные жаргонизмы в общественно-политической сфере (на примере сайтов общественно-политической тематики)»;

Юлия Морозова (Саров, гимназия 2, 11 кл.), «Характер использования устойчивых выражений и фразеологических оборотов в речи современных жителей провинциального города как показатель уровня развития культуры общества»;

Сергей Ерин (Саров, гимназия 2, 11 кл.), «Опыт сопоставительного анализа рассказов В.Ирвинга «Легенда о сонной лошине» и цикла рассказов Н.В.Гоголя «Вечера на хуторе близ Диканьки»;

Людмила Лапшина (Нижний Новгород, гимназия 13, 11 кл.), «Сектантские организации как вид мировой религиозной экспансии. Анализ деструктивных культов Н.Новгорода»;

Марина Липянина (Саров, ЦВР, клуб «Азимут», 11 кл.), «История поташного производства на территории Нижегородской области»;

Светлана Фролова (Новокузнецк, лицей 84, 10 кл.), «Императрица Анна Иоанновна глазами русских историков (опыт анализа оценок С.М.Соловьева, В.О.Ключевского, И.Н.Павленко)».

Все лауреаты, призеры и авторы отмеченных докладов на торжественном закрытии конференции были награждены дипломами, медалями и ценными подарками.

Конференция была организована при содействии Российского федерального ядерного центра ВНИИЭФ, Минатома и городской администрации города Сарова, а также при финансовой поддержке Гринфилдбанка.

Публикацию подготовил
В.Вавилов

Соотношения между средними величинами

Л. ШИБАСОВ

Немного истории

Со средним арифметическим $\frac{a+b}{2}$ и средним геометрическим \sqrt{ab} чисел a и b читатели «Кванта» хорошо знакомы. С этими величинами довольно часто приходится встречаться при решении школьных задач. А среднее арифметическое используется в различных цифровых сводках, планах и отчетах так часто, что когда мы слышим о средней величине, то автоматически представляем ее себе именно как среднее арифметическое. На этом основана известная задача-ловушка: тело двигалось первую половину пути со скоростью a , а вторую — со скоростью b ; найти среднюю скорость тела на всем пути. Искомая скорость равна не среднему арифметическому двух скоростей, как это может показаться на первый взгляд, а числу $\frac{2ab}{a+b}$, которое называется *средним гармоническим* чисел a и b .

Когда возникли понятия средних величин в математике, точно не известно. Но предполагают, что уже вавилоняне более трех тысяч лет тому назад использовали их при вычислении квадратных корней. В дошедших до нас табличках квадратные корни из натуральных чисел фактически вычислены по известной нам формуле:

$$\text{если } N = \beta^2 + r, \text{ то } \sqrt{N} = \sqrt{\beta^2 + r} \approx \beta + \frac{r}{2\beta}.$$

Восстанавливая ход рассуждений вавилонян, современные ученые пришли к выводу, что они брали среднее арифметическое чисел β и N/β . В самом деле, если обозначить $\alpha = N/\beta$, то $\beta_1 = (\alpha + \beta)/2 = \beta + r/(2\beta)$.

Много позже древнегреческий математик Герон (I в.) в своей «Метрике», применяя тот же метод приближенного вычисления квадратного корня, писал, что если результат получается со слишком большой погрешностью, то указанную процедуру можно повторить, т. е. взять среднее арифметическое чисел β_1 и N/β_1 .

Применим этот алгоритм к вычислению квадратного корня из натурального числа, записав его в виде произведения двух натуральных чисел: $N = ab$ (при простом N один из сомножителей равен единице). В качестве первого приближения значения \sqrt{ab} возьмем $b_1 = \frac{a+b}{2}$, затем, следуя рекомендации Герона, найдем $a_1 = \frac{ab}{b_1}$, которое оказывается средним гармоническим $\frac{2ab}{a+b}$ чисел a и b .

Упражнение 1. Докажите справедливость двойного неравенства

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}. \quad (1)$$

Второе приближение $b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Далее вычисляем $a_2 = \frac{a_1b_1}{b_2} = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}$. Легко видеть, что $a_1 \leq a_2 \leq \sqrt{ab} \leq b_2 \leq b_1$.

Продолжая этот процесс, на n -м шаге получаем

$$b_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad a_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}.$$

Приведем пример. Для $\sqrt{14} = \sqrt{7 \cdot 2}$ имеем $b_1 = 4,5$; $a_1 = 3, (1)$; $b_2 = 3,80 (5)$; $a_2 \approx 3,678832$; $b_3 \approx 3,742194$; $a_3 \approx 3,741121$; $b_4 \approx 3,741657$; $a_4 \approx 3,741657$. Таким образом, с точностью до 0,000001 квадратный корень из числа 14 равен 3,741657. Пример показывает, что с возрастанием номера n не только числа b_n , но и a_n с каждым шагом все точнее приближают $\sqrt{14}$. Этот факт имеет место и в общем случае.

Упражнение 2. Покажите, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает, а последовательность $\{b_n\}$ убывает, и обе сходятся к числу \sqrt{ab} .

Свои названия перечисленные средние величины получили в античные времена. Аристотель, великий философ древности, объяснял происхождение названий так. Среди чисел a , $(a+b)/2$, b каждое последующее больше предыдущего на постоянное число $(b-a)/2$ (при условии $a < b$), а сравнение типа «на сколько одно число больше другого» используется лишь в арифметике. Для величин a , \sqrt{ab} , b каждая следующая больше предыдущей в фиксированное число $\sqrt{b/a}$ раз; такое сравнение производится только в геометрии. Естественно, Аристотель высказывал отношение к операциям, бытовавшее в древнегреческой математике.

Иногда вместо термина «среднее геометрическое» используют название *среднее пропорциональное*. Объясняется это совсем просто: ведь равенство $x = \sqrt{ab}$ равносильно пропорции $a : x = x : b$, средние члены которой равны x .

Термин «среднее гармоническое» появился в школе Пифагора. Пифагорейцы, занимаясь теорией музыки, обнаружили, что две струны с длинами l и $l/2$ издают звуки, практически не различимые для нашего восприятия. Интервал, образованный этими звуками, был назван октавой. А струна длины $2l/3$ издает звук, образующий вместе с двумя исходными гармонично звучащий аккорд. Число $2l/3$ получило у пифагорейцев название среднего гармонического чисел l и $l/2$, поскольку обратное ему число $3/(2l)$ оказалось средним арифметическим чисел $1/l$ и $2/l$. Среднее гармоническое так и определяют, как число, обратная величина которого равна среднему арифметическому обратных величин исходных чисел: $\frac{a+b}{2ab} = \frac{1/a+1/b}{2}$.

Формулы, задающие различные средние, вообще говоря, имеют смысл не только при положительных a и b . Однако, чтобы каждый раз не задумываться над вопросом существования средней величины, обычно считают a и b положительными.

В этой статье читатели познакомятся с естественными обобщениями хорошо известных средних величин и свойствами этих обобщений, аналогичными отмеченным в упражнениях 1 и 2. Другими словами, читатели увидят, как можно

1) вывести неравенства, связывающие различные средние между собой; 2) построить последовательности из средних величин, доказать сходимость этих последовательностей и попытаться найти их пределы.

Средние степенные порядка s

Средним степенным порядка s (короче: средним степени s или порядка s) двух положительных чисел a и b называется величина $\Delta_s(a, b)$, задаваемая при $s \neq 0$ равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{1/s}.$$

При $s = 0$ полагают $\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b)$.

Упражнение 3. Докажите, что $\Delta_0(a, b) = \sqrt{ab}$.

Отметим, что $\Delta_s(a, a) = a$ для любого s . Легко видеть, что $\Delta_1(a, b) = \frac{a+b}{2}$, $\Delta_{-1}(a, b) = \frac{2ab}{a+b}$. Положив $s = 2$, получим еще одну часто встречающуюся в математике величину – среднее квадратичное двух чисел a и b :

$$\Delta_2(a, b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Из определения видно, что величина $\Delta_s(a, b)$ представляет собой функцию трех переменных: a, b, s . Зафиксировав любые две из них, получим три функции, каждая из которых зависит только от одной переменной. Выясним, какими свойствами обладают эти функции.

Свойство 1. При $x > 0$ функции $\Delta_s(x, b)$ и $\Delta_s(a, x)$ возрастают с возрастанием x .

Это следует из положительности производных обеих функций по x при $x > 0$.

Свойство 2. $\min\{a, b\} \leq \Delta_s(a, b) \leq \max\{a, b\}$.

На самом деле, при $a \leq b$ на основании свойства 1 получаем $a = \left(\frac{a^s + a^s}{2}\right)^{1/s} \leq \Delta_s(a, b) \leq \left(\frac{b^s + b^s}{2}\right)^{1/s} = b$.

Свойство 3. Если $a \neq b$, то функция $\Delta_s(a, b)$ возрастает при возрастании s .

Достаточно доказать возрастание $\ln \Delta_s = \frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}$. Для этого найдем его производную по переменной s :

$$(\ln \Delta_s(a, b))'_s = \frac{a^s \ln a^s + b^s \ln b^s - (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2}}{(a^s + b^s) s^2}.$$

Знаменатель полученной дроби положителен; покажем, что и числитель положителен. Обозначим $a^s = x_1$, $b^s = x_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$. Задача сводится к доказательству неравенства $x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 > (x_1 + x_2) \ln \frac{x_1 + x_2}{2}$. Если ввести функцию $f(x) = x \ln x$, то неравенство переписывается в виде

$$f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), \text{ или}$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \quad (2)$$

Лемма. Неравенство (2) верно для любой функции, производная которой возрастает.

Доказательство. Для определенности будем считать $x_1 < x_2$, тогда для $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ имеем $x_1 < x_2 < x_3$. По теореме Лагранжа для функции, заданной на отрезке $[x_1, x_3]$,

найдется точка $c_1 \in (x_1, x_3)$ такая, что $f'(c_1)(x_3 - x_1) = f(x_3) - f(x_1)$. Аналогично найдется точка $c_2 \in (x_3, x_2)$, для которой $f'(c_2)(x_2 - x_3) = f(x_2) - f(x_3)$. Так как $c_1 < c_2$, то $f'(c_1) < f'(c_2)$, т.е.

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}. \quad (3)$$

Подставляя сюда значение x_3 , приходим к неравенству (2). Лемма доказана.

Поскольку наша функция $f(x) = x \ln x$ имеет возрастающую производную на всей области определения, для нее неравенство (2) выполняется. Свойство 3 доказано.

Неравенство (2) было выведено для случая, когда точка x_3 является серединой отрезка $[x_1, x_2]$. Выясним его вид для произвольной внутренней точки отрезка.

Упражнение 4. Докажите, что для любой точки x_3 интервала (x_1, x_2) можно подобрать два положительных числа p_1 и p_2 , дающих в сумме единицу и таких, что $x_3 = p_1 x_1 + p_2 x_2$.

Заменив в (3) x_3 на $p_1 x_1 + p_2 x_2$, получим неравенство

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) < p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2), \quad (4)$$

верное для любой функции, производная которой возрастает. Оно нам понадобится в дальнейшем.

Используя перечисленные свойства, приходим к неравенствам

$$\min\{a, b\} \leq \Delta_{-1}(a, b) \leq \Delta_0(a, b) \leq \Delta_1(a, b) \leq \Delta_2(a, b) \leq \max\{a, b\}.$$

Равенства здесь достигаются лишь при $a = b$. Другими словами, выполняются следующие соотношения:

$$\min\{a, b\} \leq \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \leq \max\{a, b\}.$$

Эта цепочка неравенств имеет разнообразные красивые геометрические интерпретации. Обратимся к некоторым из них.

Упражнения

5. Пусть a и b – основания равнобедренной трапеции, описанной около окружности (рис. 1). Покажите, что ее боковая сторона равна $(a+b)/2$, высота равна \sqrt{ab} , проекция высоты на боковую сторону равна $2ab/(a+b)$.

6. На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность (рис. 2), OF – ее радиус, перпендикулярный AB , точка C лежит на продолжении отрезка AB , CD – касательная к окружности, H – проекция точки D на AB . Докажите, что если $CA = a$, $CB = b$, то

$$\begin{aligned} CO &= (a+b)/2, \\ CD &= \sqrt{ab}, \\ CH &= 2ab/(a+b), \\ CF &= \sqrt{(a^2 + b^2)}/2. \end{aligned}$$

7. Дана трапеция с основаниями a и b , $M_k N_k$ ($k = 1, 2, 3, 4$) – отрезок, параллельный основаниям и заключенный между боковыми сторонами (рис. 3). Докажите, что

а) отрезок $M_1 N_1$, проходящий через точку пересечения диагоналей, равен $\frac{2ab}{a+b}$;

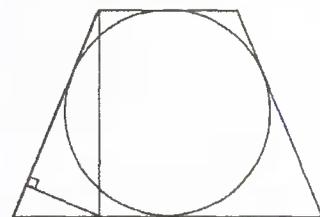


Рис. 1

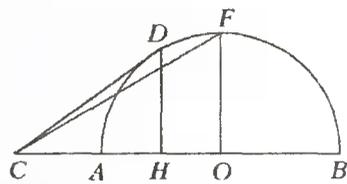


Рис. 2

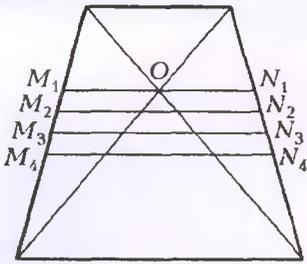


Рис. 3

- б) отрезок M_2N_2 , делящий трапецию на две подобные между собой трапеции, равен \sqrt{ab} ;
 в) отрезок M_3N_3 , являющийся средней линией трапеции, равен $\frac{a+b}{2}$;
 г) отрезок M_4N_4 , делящий трапецию на равновеликие части, равен $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Пределы последовательностей, составленных из средних величин

В предыдущем разделе мы встретились с последовательностями, составленными из средних арифметических и средних гармонических, и убедились, что они имеют общий предел. А теперь обратимся к произвольным средним порядков s и r . По аналогии образуем из них две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$:

$$a_1 = \Delta_s(a, b), \quad b_1 = \Delta_r(a, b), \quad a_2 = \Delta_s(a_1, b_1), \quad b_2 = \Delta_r(a_1, b_1), \dots$$

$$\dots, \quad a_{n+1} = \Delta_s(a_n, b_n), \quad b_{n+1} = \Delta_r(a_n, b_n), \dots$$

Будем считать $s < r$ и выясним поведение полученных последовательностей, используя свойства функции Δ_s .

Из свойства 3 вытекает неравенство $a_n = \Delta_s(a_{n-1}, b_{n-1}) \leq \Delta_r(a_{n-1}, b_{n-1}) = b_n$. Откуда, учитывая свойство 1, получаем $a_n = \Delta_s(a_n, a_n) \leq \Delta_s(a_n, b_n) = a_{n+1}$ и $b_{n+1} = \Delta_r(a_n, b_n) \leq \Delta_r(b_n, b_n) = b_n$. Таким образом, последовательность $\{a_n\}$ возрастает, а последовательность $\{b_n\}$ убывает. Причем

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1,$$

т.е. обе последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ ограничены. Из монотонности и ограниченности вытекает их сходимости. Пусть α – предел первой последовательности, β – второй.

Так как $a_{n+1}^s = \frac{a_n^s + b_n^s}{2}$, то, перейдя в этом равенстве к пределу, получим $\alpha^s = \frac{\alpha^s + \beta^s}{2}$. Отсюда $\alpha^s = \beta^s$, а значит,

$\alpha = \beta$ при $s \neq 0$. В случае $s = 0$ надо обратиться к равенству $b_{n+1}^r = \frac{a_n^r + b_n^r}{2}$, откуда при $r \neq 0$ имеем $\alpha = \beta$. (Если $s = r = 0$, то $a_n = b_n = \sqrt{ab}$ – обе последовательности постоянны.)

Обозначим общий предел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ через $\mu_{s,r}(a, b)$. К сожалению, его не всегда удается записать в явном виде. Но в отдельных случаях это сделать можно.

Предложение 1. При любом s имеем

$$\mu_{-s,s}(a, b) = \sqrt{ab}.$$

Доказательство. Так как $a_1 = \Delta_{-s}(a, b) = \left(\frac{a^{-s} + b^{-s}}{2}\right)^{1/s} =$

$= \left(\frac{2a^s b^s}{a^s + b^s}\right)^{1/s}$ и $b_1 = \Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{1/s}$, то $a_1 b_1 = ab$. Аналогично, $a_n b_n = ab$ при любом n . В пределе получаем

$\mu_{-s,s}^2(a, b) = ab$. Предложение доказано. Если в нем положить $s = 1$, то получим случай, разобранный нами ранее.

Рассмотрим еще два случая вычисления $\mu_{s,r}(a, b)$, когда соответствующие последовательности составлены из класси-

ческих средних величин. Пусть сначала $s = 0, r = 1$, тогда

$$a_1 = \sqrt{ab}, \quad b_1 = \frac{a+b}{2}, \quad a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \dots$$

$$\dots, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \dots$$

Эти две последовательности изучал еще 14-летний Гаусс. На числовых примерах он обнаружил, что они очень быстро сходятся к общему пределу, который он назвал *арифметико-геометрическим средним* чисел a и b . Обычно этот общий предел $\mu_{0,1}(a, b)$ обозначают просто через $\mu(a, b)$. Чтобы найти его приближенное значение, достаточно вычислить несколько первых членов последовательностей. Но получить точный вид $\mu(a, b)$ достаточно сложно. В 1799 году Гаусс решил эту задачу, выразив $\mu(a, b)$ через следующий интеграл:

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Результат интегрирования не записывается в конечном виде через элементарные функции от a и b . Этот интеграл относится к типу эллиптических, они довольно часто встречаются в математике и потому хорошо изучены. Составлены таблицы, пользуясь которыми можно найти приближенные значения эллиптических интегралов.

Как же получить результат Гаусса? Произведем в интеграле замену переменной, положив

$$\sin \varphi = \frac{2b \sin t}{a + b + (b - a) \sin^2 t}.$$

Если t меняется от 0 до $\pi/2$, то и φ меняется от 0 до $\pi/2$. Дифференцируя это равенство, получаем

$$\cos \varphi d\varphi = 2b \frac{a + b - (b - a) \sin^2 t}{(a + b + (b - a) \sin^2 t)^2} \cos t dt.$$

Здесь и далее мы опускаем некоторые элементарные преобразования, которые читатель сможет воспроизвести самостоятельно. Так как

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{\sqrt{(a + b)^2 - (b - a)^2 \sin^2 t}}{a + b + (b - a) \sin^2 t} \cos t,$$

то

$$d\varphi = 2b \frac{a + b - (b - a) \sin^2 t}{a + b + (b - a) \sin^2 t} \frac{dt}{\sqrt{(a + b)^2 - (b - a)^2 \sin^2 t}}.$$

Кроме того,

$$\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} = b \frac{a + b - (b - a) \sin^2 t}{a + b + (b - a) \sin^2 t}.$$

В результате подынтегральное выражение принимает вид

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \frac{2dt}{\sqrt{(a + b)^2 - (b - a)^2 \sin^2 t}} = \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \cos^2 t + ab \sin^2 t}},$$

и мы приходим к равенству

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \sin^2 t + b_n^2 \cos^2 t}}.$$

После n -кратного применения указанной замены переменных получаем

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \sin^2 t + b_n^2 \cos^2 t}}.$$

Поскольку $a_n \leq b_n$, то $a_n \leq \sqrt{a_n^2 \sin^2 t + b_n^2 \cos^2 t} \leq b_n$ и $\frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{\sqrt{a_n^2 \sin^2 t + b_n^2 \cos^2 t}} \leq \frac{1}{a_n}$. Отсюда после интегрирования по t приходим к двойному неравенству

$$\frac{\pi}{2b_n} \leq G \leq \frac{\pi}{2a_n}.$$

Остается перейти в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$: $G = \frac{\pi}{2\mu(a, b)}$.
Итак,

$$\mu(a, b) = \frac{\pi}{2G}.$$

Формула Гаусса получена. Однако и она позволяет найти только приближенное значение $\mu(a, b)$ с помощью таблиц эллиптических интегралов.

Обратимся теперь к случаю $s = -1, r = 0$, т.е. построим числовые последовательности, составленные из средних гармонических и средних геометрических:

$$a_1 = \frac{2ab}{a+b}, \quad b_1 = \sqrt{ab}, \quad a_2 = \frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}, \quad b_2 = \sqrt{a_1b_1}, \dots$$

$$\dots, \quad a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}, \dots$$

Общий предел $\mu_{-1,0}(a, b)$ последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ называют *геометрическо-гармоническим средним* чисел a и b . Он легко сводится к арифметико-геометрическому среднему.

Так как $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1/a_n + 1/b_n}{2}$, $\frac{1}{b_{n+1}} = \sqrt{\frac{1}{a_n} \frac{1}{b_n}}$, то $\frac{1}{\mu_{-1,0}(a, b)} = \mu\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$, поэтому

$$\mu_{-1,0}(a, b) = \frac{2ab}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Последний пример подсказывает нам, как можно сократить поиск значений $\mu_{s,r}(a, b)$ для различных s и r .

Предложение 2. $\mu_{-s,-r}(a, b) = \mu_{s,r}(a^{-1}, b^{-1})$.

Утверждение получается предельным переходом в следующих равенствах:

$$\Delta_{-s}(a_n, b_n) = \Delta_s^{-1}\left(\frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n}\right) \text{ и } \Delta_{-r}(a_n, b_n) = \Delta_r^{-1}\left(\frac{1}{a_n}, \frac{1}{b_n}\right).$$

Средние величины n чисел

Перейдем теперь к другому обобщению классических средних величин, распространив эти понятия на произвольное количество чисел.

Для положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n определяют следующие средние величины:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \text{ — среднее арифметическое;}$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \text{ — среднее геометрическое;}$$

$$\left(\frac{1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n}{n}\right)^{-1} = \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n} \text{ — среднее гармоническое;}$$

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \text{ — среднее квадратичное.}$$

Все они включаются в общую схему. Средним *степенным* порядка s (средним степени s) положительных чисел

a_1, a_2, \dots, a_n называют выражение

$$\Delta_s(a_1, a_2, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1^s + a_2^s + \dots + a_n^s}{n}\right)^{1/s}.$$

Ясно, что Δ_1 является средним арифметическим, Δ_2 — средним квадратичным, Δ_{-1} — средним гармоническим n чисел. Как и в случае $n = 2$, можно показать, что предел Δ_s при $s \rightarrow 0$ дает среднее геометрическое, т.е. $\Delta_0 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Очевидно, что в случае $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ функция $\Delta_s = a$ постоянна.

А теперь перейдем к неравенствам, связывающим средние величины разного порядка. Существует много способов доказательства этих неравенств. Мы рассмотрим один из них, использующий понятие выпуклой функции. Тем более что этот способ позволит нам сравнить между собой средние любого порядка.

Функция $f(x)$ называется строго *выпуклой* на некотором промежутке I , если ее график на этом промежутке имеет *выпуклость вниз*: любая хорда, стягивающая произвольные точки

$(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ графика, расположена выше самого графика (естественно, концы хорды и графика совпадают). Это означает, что для любой точки $x_3 \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство $f(x_3) < y_3$, где y_3 — ордината соответствующей точки хорды (рис.4).

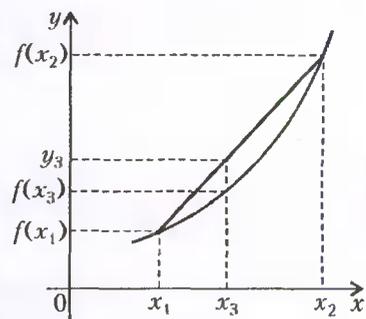


Рис. 4

Из упражнения 4 нам известно, что всегда найдутся положительные числа p_1 и p_2 , дающие в сумме единицу и такие, что

$$x_3 = p_1 x_1 + p_2 x_2.$$

Упражнение 8. Покажите, что ордината y_3 соответствующей точки хорды равна $p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)$.

Таким образом, условие строгой выпуклости функции $f(x)$ на промежутке I записывается с помощью уже встречавшегося нам неравенства (4):

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2) < p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2),$$

здесь x_1, x_2 — произвольные точки из I , числа $p_1, p_2 > 0$ и $p_1 + p_2 = 1$.

Для строго выпуклой на промежутке I функции имеет место более общее по сравнению (4) неравенство, называемое *неравенством Иенсена*;

$$f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) < p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_n f(x_n), \quad (5)$$

здесь $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, n — любое натуральное число.

Докажем неравенство Иенсена методом математической индукции. Согласно (4), при $n = 2$ оно выполняется. Предположим, что оно верно для $n = m$, и докажем его для $n = m + 1$. Рассмотрим положительные числа p_1, p_2, \dots, p_{m+1} , сумма которых равна 1. В выражении $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots$

... + $p_m x_m + p_{m+1} x_{m+1}$ сумму двух последних слагаемых преобразуем следующим образом:

$$p_m x_m + p_{m+1} x_{m+1} = (p_m + p_{m+1}) \left(\frac{p_m}{p_m + p_{m+1}} x_m + \frac{p_{m+1}}{p_m + p_{m+1}} x_{m+1} \right) = p_0 x_0,$$

где $p_0 = p_m + p_{m+1}$. По предположению индукции, неравенство Иенсена для m слагаемых выполняется (заметим, что $p_1 + p_2 + \dots + p_{m-1} + p_0 = 1$), поэтому

$$\begin{aligned} f(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_{m-1} x_{m-1} + p_0 x_0) &< \\ < p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_{m-1} f(x_{m-1}) + p_0 f(x_0) = \\ &= p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + \dots + p_{m-1} f(x_{m-1}) + \\ &+ (p_m + p_{m+1}) f\left(\frac{p_m}{p_m + p_{m+1}} x_m + \frac{p_{m+1}}{p_m + p_{m+1}} x_{m+1}\right). \end{aligned}$$

Но на основании условия выпуклости (4)

$$\begin{aligned} f\left(\frac{p_m}{p_m + p_{m+1}} x_m + \frac{p_{m+1}}{p_m + p_{m+1}} x_{m+1}\right) &< \\ < \frac{p_m}{p_m + p_{m+1}} f(x_m) + \frac{p_{m+1}}{p_m + p_{m+1}} f(x_{m+1}), \end{aligned}$$

т.е. (5) справедливо для $n = m + 1$. Неравенство Иенсена доказано.

Заметим, что если допустить возможность совпадения всех точек $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, то неравенство (5) перейдет в равенство. Обычно неравенство Иенсена так и записывают с использованием знака нестрогого неравенства.

Теперь мы в состоянии доказать следующее.

Предложение 3. Если не все числа a_1, a_2, \dots, a_n равны между собой, то функция $\Delta_s(a_1, a_2, \dots, a_n)$ возрастает при возрастании s .

Доказательство. Здесь мы фактически повторяем доказательство свойства 3 функции $\Delta_s(a, b)$, только вместо неравенства (2) используем неравенство (5). Рассмотрим

$$\ln \Delta_s = \frac{1}{s} \ln \frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n}$$

и найдем его производную:

$$\begin{aligned} (\ln \Delta_s)' &= \\ &= \frac{a_1^s \ln a_1^s + \dots + a_n^s \ln a_n^s - (a_1^s + \dots + a_n^s) \ln \frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n}}{s^2 (a_1^s + \dots + a_n^s)}. \end{aligned}$$

Покажем, что числитель этой дроби положителен (а стало быть, положительна и вся дробь). Строгая выпуклость функции $f(x) = x \ln x$ следует из возрастания ее производной. Применим к ней неравенство Иенсена, положив $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$:

$$\frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) \ln \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} < \frac{1}{n} (x_1 \ln x_1 + \dots + x_n \ln x_n).$$

Остается обозначить $x_1 = a_1^s, x_2 = a_2^s, \dots, x_n = a_n^s$. Предложение доказано.

Из предложения 3, в частности, получаем для любых n положительных чисел $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ цепочку класси-

ческих неравенств

$$\begin{aligned} a_1 &\leq \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \\ &\leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq a_n, \end{aligned}$$

где равенства достигаются лишь при $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Мы рассмотрели соотношения, связывающие наиболее простые обобщения классических средних величин на случай произвольной степени и на случай любого числа слагаемых. Но существуют и более сложные обобщения, где присутствуют различные коэффициенты (так называемые *веса*) при этих слагаемых, где степенные функции заменяются на произвольные непрерывные строго монотонные функции и т.д. С ними читатели могут познакомиться в специальной литературе.

Упражнения

9. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника, не превосходит половины гипотенузы.

10 (результат Евклида). Когда прямоугольник с заданным периметром имеет максимальную площадь?

11. При каком условии периметр прямоугольного треугольника с заданной гипотенузой максимален?

12. Покажите, что из всех параллелепипедов с заданной суммой ребер наибольший объем имеет куб.

13. При каких размерах прямоугольный параллелепипед с площадью основания 4 и объемом 12 имеет наименьшую площадь поверхности?

14 (задача 4-й Соросовской олимпиады). Найдите наименьшее значение выражения $16x^3/y + y^3/x - \sqrt{xy}$.

15. Докажите, применив неравенство Иенсена а) к функции $f(x) = e^x$, что среднее геометрическое n чисел не превосходит их среднего арифметического;

б) к функции $f(x) = x^s, x > 0$, что

$$\Delta_1(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \Delta_s(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

в случае $s > 1$ и

$$\Delta_s(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \Delta_1(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

при $s < 1$.

16. Докажите неравенство Коши

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

и выведите из него, что среднее арифметическое n чисел не превосходит их среднего квадратичного.

17. Обозначим через S_n и S_n площади правильных n -угольников, соответственно вписанных в фиксированную окружность и описанных около нее. Покажите, что $s_{2n} = \sqrt{s_n S_n}$ (результат В. Снеллиуса, 1621) и $S_{2n} = \frac{2S_n S_{2n}}{S_n + S_{2n}}$ (результат Дж. Грегори, 1667).

Магнитное поле

В. МОЖАЕВ

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ – ЭТО СИЛОВОЕ ПОЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЕ НА ДВИЖУЩИЕСЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ, НА ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТОКИ И НА ТЕЛА, ОБЛАДАЮЩИЕ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ (например, намагниченная стрелка компаса). Силовой характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции \vec{B} . Значение \vec{B} (т.е. величина и направление) полностью определяет силу, действующую в данной точке полностью на движущийся электрический заряд, – силу Лоренца. Если точечный заряд q в некоторой точке пространства имеет скорость \vec{v} , которая составляет с вектором индукции \vec{B} в этой точке угол α , то сила Лоренца, действующая на данный заряд со стороны магнитного поля, численно равна

$$F_L = qvB \sin \alpha$$

и направлена по правилу левой руки: если левую руку расположить так, чтобы составляющая магнитной индукции, перпендикулярная скорости заряда, входила в ладонь, а четыре пальца были направлены по скорости движения положительного заряда, то отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы.

Действие магнитного поля на проводник с током есть результат действия поля на движущиеся носители заряда внутри проводника. На элемент тока $I\vec{\Delta l}$ со стороны магнитного поля с индукцией \vec{B} , составляющей с элементом тока угол α , действует сила Ампера, равная

$$F_A = BI\Delta l \sin \alpha$$

и направленная тоже по правилу левой руки.

Источниками магнитного поля являются намагниченные тела, проводники с током и движущиеся электрически заряженные тела. Природа возникновения магнитного поля во всех этих случаях одна – магнитное поле возникает в результате движения заряженных микрочастиц (электронов, протонов, ионов) и благодаря наличию у микрочастиц собственного (спинового) магнитного момента.

Переменное магнитное поле возникает также при изменении во времени электрического поля. В свою очередь, изменяющееся со временем магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля (электромагнитная индукция).

А теперь перейдем к разбору конкретных задач.

Задача 1. В рамках классической модели атома водорода оцените величину индукции магнитного поля в центре круговой орбиты электрона. Радиус круговой орбиты (радиус Бора) $r_B = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м. Указание: индукция магнитного поля в центре кругового витка радиусом R с током I равна $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

В классической модели атома водорода электрон с зарядом $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл и массой $m_e = 0,91 \cdot 10^{-30}$ кг вращается вокруг протона по круговой орбите радиусом r_B (основное состояние электрона в атоме водорода). Пусть v –

скорость электрона на орбите, тогда уравнение движения электрона по круговой орбите будет иметь вид

$$\frac{m_e v^2}{r_B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_B^2}$$

Из этого уравнения найдем скорость электрона:

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r_B}} = 2,19 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Для ответа на поставленный в задаче вопрос нет необходимости вычислять скорость электрона. Однако величина этой скорости представляет познавательный интерес: скорость электрона в атоме водорода на два порядка меньше скорости света c . Квантовая механика позволяет показать, что отношение v/c выражается через универсальные постоянные и, следовательно, само является постоянной величиной. Это отношение в атомной физике называют постоянной тонкой структуры. Ее обозначают α , и она численно равна $1/137$.

Движение электрона по круговой орбите мы можем рассматривать как кольцевой ток. Сила этого тока, очевидно, будет равна отношению заряда электрона к периоду его обращения по круговой орбите:

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r_B}$$

После подстановки выражения для скорости получим

$$I = \frac{e^2}{4(\pi r_B)^{3/2} (\epsilon_0 m_e)^{1/2}}$$

Воспользовавшись выражением для индукции магнитного поля в центре кольца с током, найдем искомую величину:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r_B} = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi^{3/2} r_B^{5/2} (\epsilon_0 m_e)^{1/2}} = 12,48 \text{ Тл.}$$

Задача 2. При производстве полиэтиленовой пленки широкая лента пленки протягивается по роликам со скоростью $v = 15$ м/с (рис. 1). В процессе обработки (из-за трения) на поверхности пленки накапливается равномерно распределенный поверхностный заряд. Определите максимальное значение индукции магнитного поля вблизи поверхности пленки, учитывая, что при напряженности электрического поля $E_{пр} = 30$ кВ/см в воздухе возникает электрический разряд – пробой. Указание: индукция магнитного поля вблизи провода с током I равна $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, где r – расстояние до оси провода.

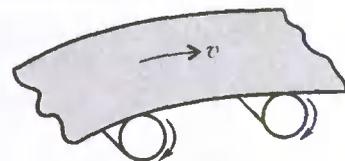


Рис. 1

Очевидно, что предельно допустимая величина напряженности электрического поля $E_{пр}$ определяет максимальное значение поверхностной плотности зарядов σ_{max} на пленке. Используя связь между напряженностью электрического поля вблизи равномерно заряженной пластины и поверхностной плотностью зарядов, можно записать

$$E_{пр} = \frac{\sigma_{max}}{2\epsilon_0}$$

Отсюда максимальная поверхностная плотность зарядов на пленке равна

$$\sigma_{max} = 2\epsilon_0 E_{пр}$$

Поскольку образовавшиеся заряды движутся вместе с плен-

кой со скоростью v , можно говорить о протекании поверхностного тока плотностью

$$j_{\max} = \sigma_{\max} v = 2\varepsilon_0 E_{\text{пр}} v.$$

Для определения индукции магнитного поля вблизи поверхности пленки рассмотрим рисунок 2, на котором поверхностный ток течет в горизонтальной плоскости рисунка, а пленка расположена в плоскости $x = 0$ и движется вдоль оси z от нас.

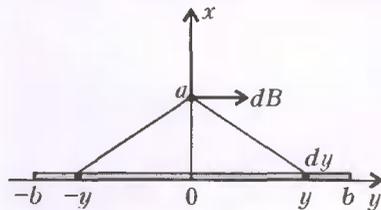


Рис. 2

Найдем индукцию магнитного поля на расстоянии a от пленки, ширина которой равна $2b$ ($a \ll b$). Для этого выделим два малых симметрично расположенных элемента шириной dy . Каждая полоска такой ширины соответствует току

$$dI = j_{\max} dy = 2\varepsilon_0 E_{\text{пр}} v dy.$$

Индукция dB , создаваемая двумя такими токами, направлена вдоль оси y и численно равна

$$dB = \frac{\mu_0 a dI}{\pi(a^2 + y^2)} = \frac{2\mu_0 \varepsilon_0 a v E_{\text{пр}} dy}{\pi(a^2 + y^2)}.$$

Чтобы найти индукцию магнитного поля, создаваемую всеми поверхностными токами пленки, необходимо проинтегрировать по y от 0 до b :

$$B = \frac{2\mu_0 \varepsilon_0 a v E_{\text{пр}}}{\pi} \int_0^b \frac{dy}{a^2 + y^2} = \frac{2\mu_0 \varepsilon_0 v E_{\text{пр}}}{\pi} \arctg \frac{y}{a} \Big|_0^b.$$

Нас интересует индукция магнитного поля вблизи поверхности пленки, т.е. когда $b \gg a$. В этом случае можно считать, что $b/a = \infty$, а магнитная индукция равна

$$B = \mu_0 \varepsilon_0 v E_{\text{пр}} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Тл}.$$

Задача 3. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит тонкий металлический обруч массой M и радиусом a . Обруч находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией B . Какой силы ток нужно пропустить вдоль обруча, чтобы он начал приподниматься?

Путь индукция магнитного поля \vec{B} направлена так, как это изображено на рисунке 3, а ток I течет по обручу против часовой стрелки. Рассмотрим бесконечно малый элемент обруча dl , заключенный между двумя радиусами-векторами, проведенными под углами α и $\alpha + d\alpha$, где $d\alpha$ – бесконечно малый угол. Длина этого элемента равна $dl = a d\alpha$. На этот элемент с током I действует сила Ампера, направленная перпендикулярно плоскости рисунка (от нас). Численно значение этой сила равно

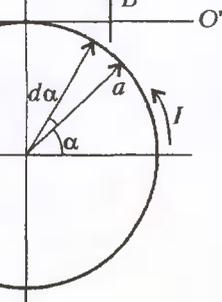


Рис. 3

$$dF = IdlB \sin \alpha = IBa \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Как видно из полученного выражения, сила Ампера при углах $0 < \alpha < \pi$ направлена от нас, а при углах $\pi < \alpha < 2\pi$ –

на нас. Следовательно, на обруч относительно оси OO' будет действовать приподнимающий момент сил, которому будет препятствовать момент силы тяжести. Очевидно, что с увеличением силы тока момент сил Ампера будет расти, при некотором предельном значении силы тока I_n он сравняется с моментом силы тяжести, и далее обруч начнет приподниматься, поворачиваясь вокруг оси OO' .

Запишем момент силы Ампера относительно оси OO' для элемента dl :

$$dM_A = -dF(a - a \sin \alpha) = IBa^2 (\sin \alpha - 1) \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Полный момент сил Ампера, действующий на весь обруч, очевидно, равен

$$M_A = IBa^2 \int_0^{2\pi} (\sin \alpha)^2 d\alpha - IBa^2 \int_0^{2\pi} \sin \alpha \cdot d\alpha.$$

Первый интеграл равен π , а второй равен нулю. Поэтому

$$M_A = \pi IBa^2.$$

Момент силы тяжести обруча относительно оси OO' равен

$$M_T = -Mga.$$

Обруч начнет приподниматься, когда суммарный момент сил станет равным нулю:

$$\pi I_n Ba^2 - Mga = 0.$$

Отсюда сила тока, при которой обруч начнет приподниматься, равна

$$I_n = \frac{Mg}{\pi Ba}.$$

Задача 4. На горизонтальном непроводящем диске по его диаметру укреплен тонкий металлический стержень AC (рис.4). Диск находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной $B = 10^{-2}$ Тл и перпендикулярной плоскости диска, и совершает крутильные гармонические колебания относительно вертикальной оси, проходящей через центр диска O : $\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t$. Длина стержня $L = a + b$, где $a = 0,5$ м и $b = 1,0$ м. Определите максимальную разность потенциалов между концами стержня A и C , если $\varphi_0 = 0,6$ рад и $\omega = 0,2$ с $^{-1}$.

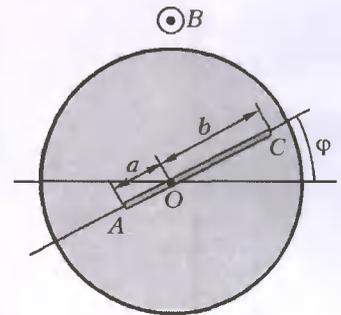


Рис. 4

Пусть в некоторый момент времени стержень движется против часовой стрелки. Угловая скорость стержня равна

$$\varphi'(t) = \varphi_0 \omega \cos \omega t.$$

Линейная скорость свободных зарядов, находящихся на расстоянии x от оси вращения (рис.5), в этот момент составляет

$$v(x, t) = \varphi'(t) x = \varphi_0 \omega x \cos \omega t.$$

На эти заряды будет действовать сила Лоренца, равная

$$F_L = ev(x, t) B = e\varphi_0 \omega x B \cos \omega t.$$

Под действием силы Лоренца произойдет перераспреде-

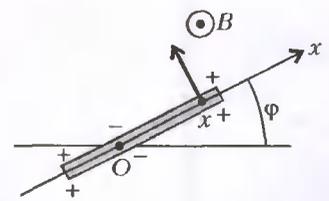


Рис. 5

ние свободных зарядов: на концах стержня возникнет избыточный положительный заряд, а в районе точки O появится отрицательный заряд. Перераспределение зарядов приведет к появлению внутри стержня электрического поля. Напряженность электрического поля $E(x, t)$ в любой точке стержня можно найти из условия равновесия зарядов (отсутствия тока), когда сила Лоренца равна электростатической силе со стороны появившегося электрического поля. Запишем это условие:

$$e\varphi_0\omega x B \cos \omega t + eE(x, t) = 0,$$

откуда

$$E(x, t) = -\varphi_0\omega x B \cos \omega t.$$

Мы получили для произвольного момента времени распределение напряженности электрического поля вдоль стержня. Разность потенциалов между концами стержня A и C будет равна

$$U(t) = -\int_{-a}^b E(x, t) dx = \int_{-a}^b \varphi_0\omega B \cos \omega t \cdot x dx = \frac{\varphi_0\omega B}{2}(b^2 - a^2) \cos \omega t.$$

Очевидно, что максимальная разность потенциалов составит

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \varphi_0\omega B(b^2 - a^2) = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ В}.$$

Задача 5. На горизонтальной поверхности стола закреплена тонкая проводящая квадратная рамка со стороной a (рис. 6). На рамке лежит стержень массой M , расположенный параллельно боковым сторонам рамки на расстоянии $b = a/4$ от одной из сторон. Рамка и стержень изготовлены из одного куска провода с омическим сопротивлением единичной длины ρ . В некоторый момент включается однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки. Какую скорость приобретет стержень за время установления магнитного поля, если установившееся значение индукции равно B_0 ? Смещением стержня за время установления магнитного поля и трением между стержнем и рамкой пренебречь.

Рассмотрим внутри промежутка времени установления магнитного поля некий произвольный момент t , когда индукция магнитного поля равна $B(t)$. В этот момент контур $ACDK$ (рис. 7) пронизывается магнитным потоком $\Phi_1 = B(t)ab$, а контур $DNOK$ — потоком $\Phi_2 = B(t)a(a-b)$. Изменяющееся во времени магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля. Если магнитное поле симметрично относительно оси, перпендикулярной плоскости рамки и проходящей через ее центр, то силовые линии этого поля будут иметь вид окруж-

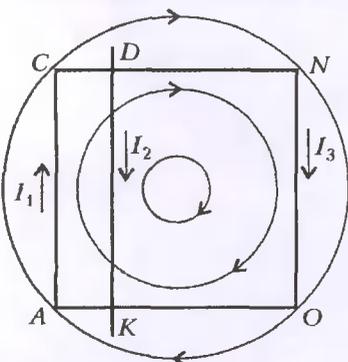


Рис. 7

ностей, расположенных в плоскости рамки (см. рис. 7). Работа, совершаемая вихревым электрическим полем по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру (например, по контуру $ACDK$), численно равна ЭДС индукции \mathcal{E}_1 , действующей в этом контуре. Закон электромагнитной индукции Фарадея позволяет выразить ЭДС индукции в замкнутом контуре через скорость изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур. Для контура $ACDK$ получим

$$\mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -ab \frac{dB(t)}{dt} = -\frac{a^2}{4} \frac{dB(t)}{dt}.$$

Аналогично, для контура $DNOK$ —

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -a(a-b) \frac{dB(t)}{dt} = -\frac{3a^2}{4} \frac{dB(t)}{dt}.$$

Пусть в данный момент по проводникам текут токи, указанные на рисунке 7. Запишем второе правило Кирхгофа для рассматриваемых контуров. Для контура $ACDK$:

$$\frac{a^2}{4} \frac{dB(t)}{dt} = I_1\rho a + I_1 \cdot 2\rho b + I_2\rho a = \frac{3}{2}\rho a I_1 + \rho a I_2.$$

Для контура $DNOK$:

$$\frac{3a^2}{4} \frac{dB(t)}{dt} = 2\rho(a-b)I_3 + \rho a I_3 - \rho a I_2 = \frac{5}{2}\rho a I_3 - \rho a I_2.$$

Из первого правила Кирхгофа (закона сохранения заряда) следует, что

$$I_2 + I_3 = I_1.$$

Совместное решение последних трех уравнений позволяет найти ток I_2 :

$$I_2 = -\frac{2a}{31\rho} \frac{dB(t)}{dt}.$$

Знак «минус» означает, что мы не угадали направление тока через стержень — ток будет течь снизу вверх.

На стержень DK будет действовать сила Ампера, направленная к центру рамки и равная

$$F_A(t) = -I_2 a B(t) = \frac{2a^2}{31\rho} B(t) \frac{dB(t)}{dt} = \frac{a^2}{31\rho} \frac{d(B^2(t))}{dt}.$$

За время установления магнитного поля на стержень действует импульс силы, равный

$$\int_0^{B_0} F_A(t) dt = \int_0^{B_0} \frac{a^2}{31\rho} d(B^2(t)) = \frac{a^2 B_0^2}{31\rho}.$$

Этот импульс силы приведет к изменению импульса стержня:

$$\frac{a^2 B_0^2}{31\rho} = Mv.$$

Отсюда и находим скорость, которую приобретет стержень:

$$v = \frac{a^2 B_0^2}{31M\rho}.$$

Задача 6. Вакуумный плоский диод, в котором расстояние между катодом и анодом равно d , находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна B и направлена параллельно плоскости электродов. При каком минимальном напряжении на диоде электроны с поверхности катода смогут достичь анода? Электроны у поверхности катода считать неподвижными, а полем тяжести пренебречь.

Будем рассматривать такие напряжения на диоде, при которых электроны, покинувшие катод, снова возвращаются на него, не достигнув анода. На рисунке 8 изображен начальный участок траектории электрона при заданном

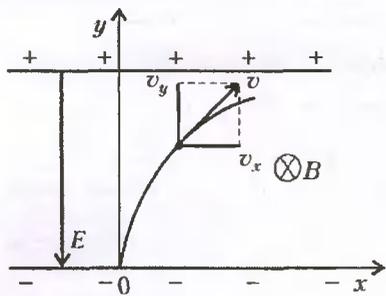


Рис. 8

направлении индукции магнитного поля. Пусть электрон находится в некоторой точке траектории и имеет две проекции скорости v_x и v_y , а между пластинами существует однородное электрическое поле напряженностью \vec{E} . Тогда на электрон действуют силы как со стороны магнитного поля, так и со стороны электрического.

Запишем уравнения движения электрона по осям x и y :

$$m_e \frac{dv_x}{dt} = ev_y B, \quad m_e \frac{dv_y}{dt} = eE - ev_x B,$$

где m_e и e – масса и заряд электрона. Перепишем эти уравнения в преобразованном виде:

$$v'_x = \omega_{\text{ц}} v_y, \\ v'_y = \frac{e}{m_e} E - \omega_{\text{ц}} v_x,$$

где коэффициент $\omega_{\text{ц}} = \frac{eB}{m_e}$ называется циклотронной частотой. Циклотронная частота – это частота обращения электрона или любой другой частицы с таким же удельным зарядом по круговой орбите в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{B} . Проинтегрируем обе части второго уравнения по времени и подставим сюда выражение для v'_x из первого уравнения. Получившееся относительно v_y уравнение будет иметь вид

$$v''_y + \omega_{\text{ц}}^2 v_y = 0.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания. Решение этого уравнения запишем в виде

$$v_y(t) = A \sin \omega_{\text{ц}} t + C \cos \omega_{\text{ц}} t,$$

где A и C – константы, которые найдем из начальных условий. При $t = 0$ $v_y(0) = 0$ и $v'_y = \frac{eE}{m_e}$. Отсюда следует, что $C = 0$ и $A = \frac{eE}{m_e \omega_{\text{ц}}}$. Окончательное выражение для $v_y(t)$ будет иметь вид

$$v_y(t) = \frac{eE}{m_e \omega_{\text{ц}}} \sin \omega_{\text{ц}} t.$$

Теперь можно найти смещение электрона по оси y :

$$y(t) = \int_0^t v_y(t) dt = \int_0^t \frac{eE}{m_e \omega_{\text{ц}}} \sin \omega_{\text{ц}} t \cdot dt = \frac{eE}{m_e \omega_{\text{ц}}^2} (1 - \cos \omega_{\text{ц}} t).$$

Из уравнения для $v_y(t)$ мы можем найти те моменты времени t_N , когда электрон максимально удаляется от катода и в этот момент проекция его скорости на ось y равна нулю:

$$\omega_{\text{ц}} t_N = (2N + 1) \pi, \text{ где } N = 0, 1, 2, \dots$$

В эти моменты времени смещение электрона y_N будет равно

$$y_N = \frac{2eE}{m_e \omega_{\text{ц}}^2} = \frac{2m_e E}{eB^2}.$$

Когда траектория электрона своей вершиной коснется анода, смещение y_N будет равно расстоянию d между катодом и анодом, а напряжение на диоде будет равно искомому минимальному напряжению U_{min} :

$$d = \frac{2m_e U_{\text{min}}}{eB^2},$$

откуда

$$U_{\text{min}} = \frac{ed^2 B^2}{2m_e}.$$

Упражнения

1. По оси полого металлического немагнитного цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $q = 10^{-8}$ Кл/м. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$ с $^{-1}$. Полагая, что длина цилиндра много больше его внешнего диаметра, определите индукцию магнитного поля: 1) в полости цилиндра; 2) в материале цилиндра; 3) во внешнем пространстве. Указание: индукция магнитного поля внутри длинного соленоида равна $B = \frac{\mu_0 N I}{L}$, где N – полное число витков соленоида, L – длина катушки, а I – ток в обмотке соленоида.

2. На непроводящей горизонтальной поверхности стола лежит проводящая жесткая тонкая рамка из однородного куска провода в виде равностороннего треугольника со стороной a . Рамка находится в однородном горизонтальном магнитном поле, линии индукции которого перпендикулярны одной из сторон рамки. Масса рамки M , величина индукции B . Какой силы ток нужно пропустить по рамке, чтобы она начала приподниматься относительно одной из вершин треугольника?

3. Металлический стержень AC одним концом (точка A) шарнирно закреплен на вертикальном диэлектрическом стержне AO . Другой конец (точка C) связан с вертикальным стержнем с помощью нерастяжимой непроводящей горизонтальной нити OC длиной $R = 1$ м (рис.9). Стержень AC вращается вокруг стержня AO в однородном магнитном поле, индукция которого вертикальна и равна $B = 10^{-2}$ Тл. Угловая скорость вращения стержня $\omega = 60$ с $^{-1}$. Определите разность потенциалов между точками A и C .

4. На горизонтальной поверхности стола закреплена тонкая проводящая рамка в виде равностороннего треугольника со стороной a (рис. 10). На рамке лежит стержень, который параллелен основанию треугольника, а середина стержня находится на середине высоты AC . Рамка и стержень изготовлены из одного куска провода, омическое сопротивление единицы длины которого равно ρ . В некоторый момент включается однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки. Какую скорость приобретет стержень за время установления магнитного поля, если установившееся значение индукции равно B_0 ? Масса стержня M . Смещением стержня за время установления магнитного поля пренебречь. Трение не учитывать.

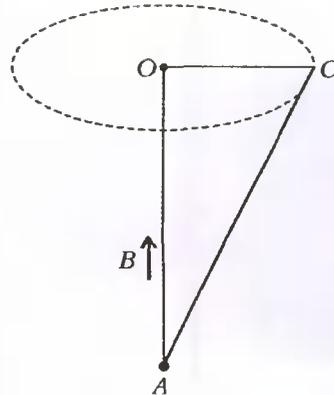


Рис. 9

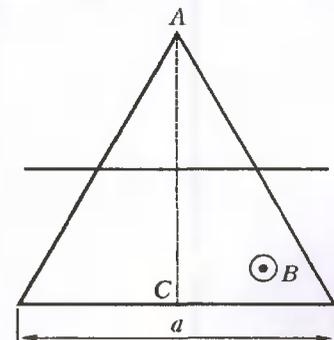


Рис. 10

Барометрический парадокс

Известно, что атмосферное давление p падает с высотой h . Количественно это описывается барометрической формулой

$$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g_0 h}{p_0}}, \quad (1)$$

где $p_0 = 101325$ Па – нормальное атмосферное давление на нулевой высоте, $g_0 = 9,80665$ м/с² – значение ускорения свободного падения на нулевой высоте, $\rho_0 = 1,29$ кг/м³ – плотность воздуха при нормальных условиях и при $h = 0$. При выводе этой формулы в курсе общей физики (или школьном курсе физики повышенного уровня) предполагается постоянство ускорения свободного падения, хотя на самом деле оно уменьшается с высотой по закону

$$g(h) = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2, \quad (2)$$

где $R = 6371$ км – радиус Земли. Почему же не учитывается это обстоятельство?

Оказывается, применение формулы (2) приводит к парадоксу, который назовем *барометрическим*. Разбирать же парадоксы и в самом деле лучше не на страницах учебников.

Допустим, что атмосфера подчиняется закону Клапейрона–Менделеева для идеальных газов и что ее температура всюду постоянна. Тогда получим следующее. Бесконечно малое изменение давления dp при подъеме с высоты h на высоту $h + dh$, где dh – бесконечно малое приращение высоты, равно $dp = -\rho g dh$. Здесь $\rho = \rho_0 p / p_0$ – плотность воздуха на высоте h (использована прямая пропорциональность плотности и давления идеального газа.) С учетом формулы (2) имеем

$$dp = -p \frac{\rho_0 g_0 R^2}{p_0} \frac{dh}{(R+h)^2}, \text{ или } \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g_0 R^2}{p_0} \frac{d(R+h)}{(R+h)^2}. \quad (3)$$

Интегрируем равенство (3):

$$\int \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g_0 R^2}{p_0} \int (R+h)^{-2} d(R+h), \quad \ln p = \frac{\rho_0 g_0 R^2}{p_0 (R+h)} + C,$$

где C – постоянная интегрирования. Так как при $h = 0$ $p = p_0$, то $C = \ln p_0 - \rho_0 g_0 R / p_0$. Тогда

$$\ln p = \ln p_0 - \frac{\rho_0 g_0 R h}{p_0 (R+h)}, \text{ или } p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g_0 R h}{p_0 (R+h)}}. \quad (4)$$

(Естественно, что при $h \ll R$ из последнего выражения вытекает формула (1).)

Теперь самое интересное: из формулы (4) находим, что при

$h \rightarrow \infty$ $p_\infty = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g_0 R}{p_0}}$, т.е. давление атмосферы на бесконечности не равно нулю! А поскольку $p_\infty = n_\infty kT$ и $p_0 = n_0 kT$, где n_∞ – концентрация молекул на бесконечно большой высоте, $n_0 = 2,687 \cdot 10^{25}$ м⁻³ – постоянная Лошмидта, T – абсолютная температура изотермической атмосферы, то

$$n_\infty = n_0 e^{-\frac{\rho_0 g_0 R}{p_0}}$$

– концентрация молекул тоже конечна на любой высоте. Но отсюда вытекает парадоксальный вывод: число молекул в атмосфере бесконечно, следовательно, бесконечна и ее масса!

Парадокс разрешается следующим образом. В атмосфере всегда существует небольшая часть молекул, скорости которых превосходят вторую космическую. Поэтому планетные атмосферы неперестают рассеиваться в окружающее пространство. Однако, опасаться остаться без атмосферы у землян основания нет, ибо рассеивание это крайне медленное. Так что проблема чистоты воздуха куда важнее проблемы его сохранности.

Об остывании чайника

Рыночная экономика привела к невероятному изобилию товаров в нашей стране по сравнению с тем, что было, скажем, двадцать лет назад. Например, появились чайники, обычные и заварочные, самой разнообразной формы, включая стеклянную сферическую колбу на подставке (чтобы не падала).

Интересно, что сферический чайник обладает замечательным свойством остывать медленнее всех чайников равного объема. Обоснуем это.

В геометрии имеется красивая теорема: из всех тел данного объема наименьшую поверхность имеет шар. Внутренняя энергия воды в чайнике определяется только его объемом, а вот потери этой энергии, связанные с излучением, происходят тем медленнее, чем меньше поверхность излучения, что и доказывает наше утверждение.

Особенность сферического чайника можно проверить на опыте. Нальем одновременно равные объемы кипятка в такой чайник и в цилиндрическую стеклянную банку. Замерив температуру воды через 30–45 минут, обнаружим разницу, легко фиксируемую термометром. Брать время очень малое или чересчур большое неудобно – в обоих случаях различие в температурах будет слишком мало для измерения.

Бритва и лампочка

Как-то утром я заметил, что звук, издаваемый мотором электробритвы, отличается от привычного. Сначала подумалось, что бритва скоро выйдет из строя, так как она довольно старая. Но эта гипотеза не подтвердилась. Вечером открылась настоящая причина странного «голоса» бритвы: настольная лампа горела так тускло, что стало очевидным заметное понижение напряжения в сети. И точно – вольтметр показал 180 В.

Естественно было попробовать оценить, какую мощность P потребляла эта лампочка, рассчитанная на мощность $P_0 = 75$ Вт при номинальном напряжении $U_0 = 220$ В, когда напряжение в сети упало до $U = 180$ В. Пусть R_0 – сопротивление нити накала лампочки в нормальном режиме, а R – в реальном. Тогда из формул

$$P = \frac{U^2}{R} \text{ и } P_0 = \frac{U_0^2}{R_0} \text{ сразу получим } \frac{P}{P_0} = \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 \frac{R_0}{R}.$$

Известно, что $R_0 = \tau_0 (1 + \alpha t_0)$ и $R = \tau_0 (1 + \alpha t)$, где τ_0 – сопротивление нити накала при 0°C , $\alpha = 0,00481$ 1/ $^\circ\text{C}$ – температурный коэффициент удельного сопротивления вольфрама. Заметим для сравнения, что $1/273$ 1/ $^\circ\text{C} = 0,0037$ 1/ $^\circ\text{C}$. Видим, что при достаточно, но не излишне точном расчете выгодно перейти к абсолютным температурам $T_0 = t_0 + 273$ К и $T = t + 273$ К. Тогда для отношения соответствующих мощностей получаем

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{U}{U_0} \right)^2 \frac{T_0}{T}.$$

Применяя закон Стефана–Больцмана, запишем

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T^4}{T_0^4}.$$

Сопоставление двух последних формул дает

$$P = P_0 \left(\frac{U}{U_0} \right)^{1,6}.$$

Подставим числовые значения и получим $P \approx 54$ Вт. Неудивительно, что уменьшение напряжения в сети было заметно на глаз.

В. Дроздов

LXVII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Кузнечик прыгает вдоль прямой в одну сторону на 80 см или в другую на 50 см. Может ли он менее чем за 7 прыжков удалиться от начальной точки ровно на 1 м 70 см?

Фольклор

2. Килограмм говядины с костями стоит 78 рублей, килограмм говядины без костей – 90 рублей, а килограмм костей – 15 рублей. Сколько граммов костей в килограмме говядины?

А.Хачатурян

3. а) Придумайте три правильные несократимые дроби, сумма которых – целое число, а сумма обратных к ним чисел, получаемых «перевертыванием» дробей, тоже является целым числом.

б) То же, но числители дробей – не равные друг другу натуральные числа.

Т.Голенищева-Кутузова

4. Сложите из фигур, изображенных на рисунке,

а) квадрат размером 9×9 с вырезанным в его центре квадратом 3×3 ;

б) прямоугольник размером 9×12 . (Фигуры можно не только поворачивать, но и переворачивать.)

А.Хачатурян

5. Вадик написал название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив таблицу 1. Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, он составил таблицу 2 и выписал ее последний столбец: ВКСАМО.

Таблица 1

М	О	С	К	В	А
А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
С	К	В	А	М	О
О	С	К	В	А	М

Таблица 2

А	М	О	С	К	В
В	А	М	О	С	К
К	В	А	М	О	С
М	О	С	К	В	А
О	С	К	В	А	М
С	К	В	А	М	О

Саша сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» МТТЛАРАЕКИС. Что это за город, если его название начинается с буквы С?

А.Шень

7 класс

1. Ваня задумал простое трехзначное число, все цифры которого различны, а последняя цифра равна сумме первых двух. Какова эта последняя цифра?

И.Яценко

2. Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трех углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с медом освещены. Когда они полезли за медом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть?

Т.Голенищева-Кутузова, Ю.Кудряшов

3. На доске написаны три правильные несократимые дроби, дающие в сумме единицу, причем их числители – различные натуральные числа. Оказалось, что если каждую из этих дробей «перевернуть» (т.е. заменить на обратную), то сумма полученных дробей будет натуральным числом. Приведите пример таких дробей.

Т.Голенищева-Кутузова

4. Таня написала название своего родного города и все его циклические сдвиги, получив таблицу 1 (см. задачу 5 для 6 класса). Затем, упорядочив эти «слова» по алфавиту, она составила таблицу 2 и выписала ее последний столбец: ВКСАМО.

Валера сделал то же самое с названием своего родного города и получил «слово» ОССНГСОР ОК. Что это за город, если его название заканчивается на букву К?

А.Шень

5. См. задачу 4,а) для 6 класса.

6. Из Цветочного города в Солнечный ведет шоссе длиной 12 км. На втором километре этого шоссе расположен железнодорожный переезд, который три минуты закрыт и три минуты открыт и т.д., а на четвертом и на шестом километрах расположены светофоры, которые две минуты горят красным светом и три минуты – зеленым и т.д. Незнайка выезжает из Цветочного города в Солнечный в тот момент, когда переезд только что закрылся, а оба светофора только что переключились на красный. За какое наименьшее время (в минутах) он сможет доехать до Солнечного города, не нарушая правил, если его электромобиль едет по шоссе с постоянной скоростью (Незнайка не умеет ни тормозить, ни увеличивать скорость)?

И.Яценко

Избранные задачи старших классов

1. Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12 часов повышается или понижается на n процентов, где

$n < 100$ – фиксированное натуральное число (курс не округляется). Существует ли n , для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение? (8, 9)¹

Б. Френкин

2. а) Семь картонных выпуклых многоугольников положили на стол так, что любые 6 можно прибить к столу двумя гвоздями, а все 7 – нельзя. Приведите пример такого расположения. (Многоугольники могут перекрываться.)

б) Приведите пример, когда всего многоугольников восемь, можно прибить двумя гвоздями любые 7 из них, а все 8 – нельзя. (8)

А. Акоюн

3. На шахматной доске лежат (по клеткам) 32 неперекрывающиеся доминошки (прямоугольники 1×2). К верхнему горизонтальному ряду добавили справа 1 клетку. Разрешается вынимать любую доминошку и перекладывать ее на пустую пару клеток. Докажите, что можно расположить все доминошки горизонтально. (8)

А. Шаповалов

4. У квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ коэффициенты p и q увеличили на 1. Эту операцию повторили 9 раз. Могло ли оказаться, что у 10 полученных уравнений корни – целые числа? (8, 9)

И. Яценко

5. Бильярдный стол имеет форму многоугольника (не обязательно выпуклого), у которого соседние стороны перпендикулярны друг другу. В его вершинах расположены лузы. Из вершины s (внутренним) углом 90° выпущен шар, который отражается от сторон многоугольника по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что шар никогда не вернется в исходную вершину. (9)

А. Канель-Белов

6. Пусть l_a, l_b, l_c – длины биссектрис углов A, B, C треугольника ABC , а m_a, m_b, m_c – длины соответствующих медиан. Докажите, что

$$\frac{l_a}{m_a} + \frac{l_b}{m_b} + \frac{l_c}{m_c} > 1. \quad (9)$$

С. Маркелов

7. Назовем натуральное число *разрешенным*, если оно имеет не более 20 различных простых делителей. В начальный момент имеется куча из $2004!$ (т.е. $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2004$) камней. Два игрока по очереди забирают из кучи то или иное разрешенное количество камней. Побеждает тот, кто заберет последние камни. Кто выигрывает при правильной игре? (9, 10)

А. Канель-Белов

¹ В скобках после текста задачи указан класс, в котором она предлагалась.

8. Перед экстрасенсом лежит колода из 36 карт рубашками вверх. Он называет масть верхней карты, после чего карту открывают и показывают ему. Затем экстрасенс называет масть следующей карты, и т.д. Его задача – угадать масть как можно большее число раз.

Рубашки карт несимметричны, и жулик-экстрасенс знает порядок карт в колоде и может расположить рубашку каждой карты тем или иным образом.

Мог ли экстрасенс так договориться с помощником, когда тот еще не знал порядок карт, чтобы обеспечить угадывание масти не менее чем: а) 19 карт; б) 23 карт? (9, 10).

А. Шаповалов

9. Арифметическая прогрессия состоит из целых чисел. Сумма ее первых n членов является степенью двойки. Докажите, что n – также степень двойки. (10)

М. Скопенков

10. Назовем *белыми* числа вида $\sqrt{a + b\sqrt{2}}$, где a и b – целые числа, не равные нулю. Аналогично, назовем *черными* числа вида $\sqrt{c + d\sqrt{7}}$, где c и d – целые, не равные нулю числа. Может ли черное число равняться сумме нескольких белых? (10)

С. Маркелов

11. Радиус описанной окружности треугольника ABC равен радиусу окружности, касающейся стороны AB в точке C' и продолжений двух других сторон в точках A' и B' . Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABC совпадает с ортоцентром (точкой пересечения высот) треугольника $A'B'C'$. (10)

А. Заславский

12. Докажите, что любой квадратный трехчлен можно представить в виде суммы двух квадратных трехчленов с нулевыми дискриминантами. (11)

И. Сергеев

13. Верно ли, что на любых четырех попарно скрещивающихся прямых a, b, c, d можно так выбрать по одной точке, чтобы эти точки были вершинами: а) трапеции; б) параллелограмма? (11)

П. Бородин

14. Треугольник ABC с острым углом $\angle A = \alpha$ вписан в окружность. Ее диаметр, проходящий через основание высоты треугольника, проведенной из вершины B , делит треугольник ABC на две части одинаковой площади. Найдите величину угла B . (11)

П. Бородин

Публикацию подготовил Б. Френкин

Почем доллар?

Александр Хачатурян предложил для журнала «Квант» следующий цифровой ребус:

$$\text{РУБЛЬ} \times 28,2 = \text{ДОЛЛАР}.$$

Этот ребус имеет единственное решение. Попробуйте его найти.

Конечно, когда этот ребус появится на странице журнала, курс доллара уже будет иным. Найдите решения других ребусов, также допускающих единственное решение:

$$\text{РУБЛЬ} \times 10,2 = \text{ДОЛЛАР},$$

$$\text{РУБЛЬ} \times 85,4 = \text{ДОЛЛАР}.$$

Здесь приведены минимальный (10,2) и максимальный (85,4) коэффициенты пересчета валют вида x,y,z .

Для тех, кто верит в повышение курса рубля, приведем такой ребус:

$$\text{РУБЛЬ} \times 3 = \text{ДОЛЛАР}.$$

Он также имеет единственное решение. А вот ребус

$$\text{РУБЛЬ} \times 2 \text{ ДОЛЛАР}$$

имеет два решения.

Очевидно, что среди целых чисел коэффициент пересчета 2 – наименьший. Попробуйте найти наименьший коэффициент пересчета среди дробных чисел вида x,y,z .

А. Жуков

Избранные задачи Московской физической олимпиады

Первый теоретический тур

8 класс

1. На вездеходе установлен курсограф – самописец, записывающий зависимости от времени текущей скорости и направления движения этого вездехода. На рисунке 1

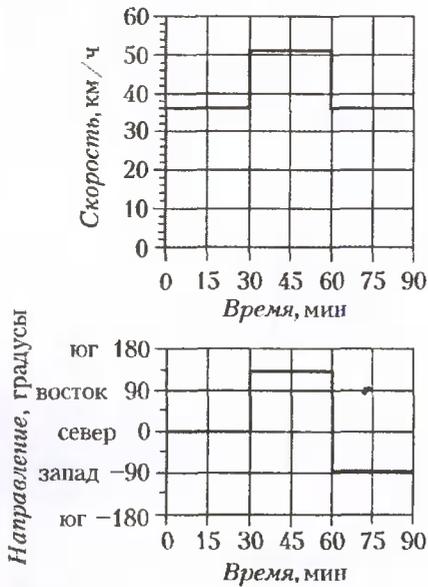


Рис. 1

показаны такие записи для некоторого маршрута, пройденного вездеходом. Определите с точностью до километра, где (относительно начала пути) вездеход оказался в конце маршрута.

А. Андрианов

2. Известно, что при помощи подвижного блока можно получить выигрыш в силе в 2 раза. Школьник Вася изобрел такую схему из подвижных и неподвижных блоков, которая дает выигрыш в силе в 7 раз. Придумайте и нарисуйте возможные варианты этой схемы.

Ю. Старокуров

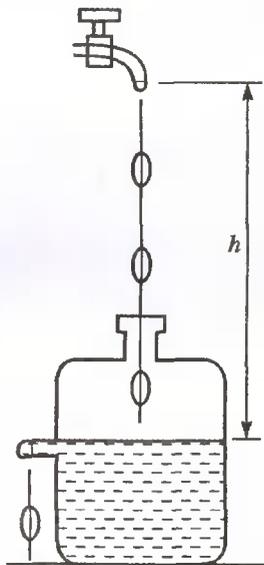


Рис. 2

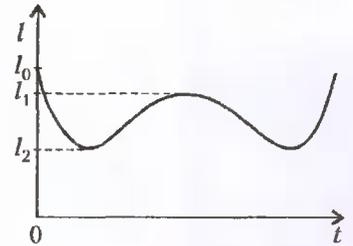
3. В стоящий на столе calorиметр (рис. 2) налита вода комнатной температуры t_0 . С большой высоты h в calorиметр падают одинаковые капли воды той же температуры t_0 . На уровне поверхности воды в calorиметре имеется небольшое отверстие, через которое вытекает лишняя вода. Какая

температура установится в calorиметре спустя большое время после начала падения капель? Удельная теплоемкость воды c , ускорение свободного падения капель g . Теплоемкостью calorиметра, отдачей тепла от его стенок и испарением воды можно пренебречь.

М. Семенов

9 класс

1. Тело бросили вертикально вверх с поверхности земли. Расстояние l между этим телом и неподвижным наблюдателем изменяется со временем t по закону, показанному на рисунке 3. На какой высоте над землей и на каком расстоянии от линии, по которой движется тело, находится наблюдатель? Чему равна начальная скорость тела? Величины l_0 , l_1 и l_2 считать известными, ускорение свободного падения равно g .



О. Шведов Рис. 3

2. Легкий цилиндр зажат между двумя одинаковыми рычагами так, что угол между ними равен α (рис. 4). Точками показаны неподвижные оси рычагов, а стрелками – силы, приложенные к концам рычагов. При каком минимальном коэффициенте трения между рычагами и цилиндром он может находиться в равновесии в этом положении? Силой тяжести пренебречь.

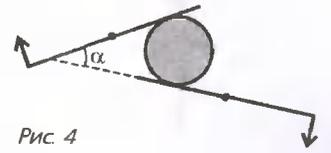


Рис. 4

Д. Харабадзе

3. В calorиметре с некоторым количеством воды находится электронагреватель постоянной мощности. Если включить нагреватель в сеть, а в calorиметр добавлять воду с температурой 0°C со скоростью 1 г/с , то установившаяся температура воды в calorиметре будет 50°C . Какая температура установится в calorиметре, если в него вместо воды добавлять лед с температурой 0°C со скоростью $0,5\text{ г/с}$? Теплообменом calorиметра с окружающей средой пренебречь. Удельная теплоемкость воды $4,2\text{ кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг .

О. Шведов

4. На циферблате башенных часов, изготовленном из непроводящего материала, между соседними металлическими делениями, расположенными через 1 минуту по всему кругу, включены одинаковые резисторы сопротивлением r каждый. На концах часовой и минутной стрелок, также изготовленных из непроводящего материала, имеются контакты, соприкасающиеся с минутными делениями, находящимися под соответствующей стрелкой. Минутная стрелка

скачком сдвигается на одно деление через каждую минуту, а часовая – через каждые 12 минут. Ровно в 12.00 к контактам на концах стрелок подсоединили прибор для измерения сопротивления – омметр. Через какое время после этого показания омметра в первый раз достигнут максимального значения, и чему будет равно это значение?

К. Башевой

10 класс

1. На горизонтальной шероховатой поверхности диска лежит небольшая шайба с привязанной к ней легкой нерастяжимой нитью длиной L (рис.5). Другой конец нити прикреплен к легкому маленькому гладкому колечку, надто-

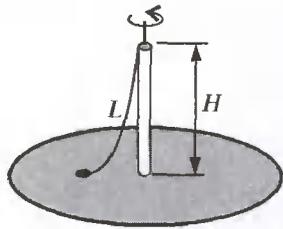


Рис. 5

тому на тонкую часть вертикальной оси, которая проходит через центр диска. Колечко находится от плоскости диска на высоте $H < L$, а радиус диска больше чем $\sqrt{L^2 - H^2}$. Диск начинают раскручивать вокруг оси с постепенно увеличивающейся угловой скоростью. Какую максимальную скорость может приобрести шайба по прошествии достаточно большого промежутка времени после начала раскручивания диска? Трением о воздух пренебречь.

В. Погожев

2. Пружинный маятник вывели из положения равновесия, сместив грузик в вертикальном направлении и отпустив его без начальной скорости. Известно, что маятник колеблется с постоянным периодом $T = 1$ с и что за половину периода амплитуда его колебаний уменьшается на $\epsilon = 0,2\%$. До полной остановки грузик маятника прошел путь $s = 999$ см.

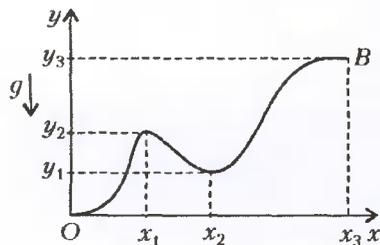


Рис. 6

Найдите величину начального отклонения грузика.

А. Якута

3. Какую работу необходимо совершить, чтобы достаточно медленно переместить небольшой ящик массой m из точки O в точку B по горке, действуя на

него силой, направленной по касательной к траектории его движения? Профиль горки показан на рисунке 6, коэффициент трения ящика о горку равен μ , ускорение свободного падения равно g . Указанные на рисунке значения координат считать известными.

В. Погожев

4. Идеальный газ находится в цилиндре с площадью основания S под невесомым поршнем, который удерживает-

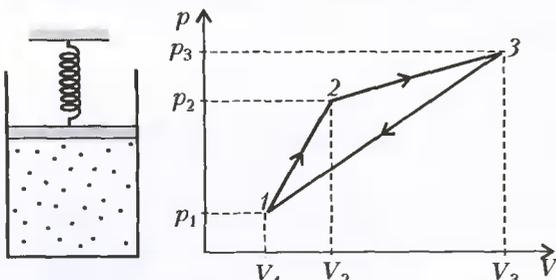


Рис. 7

ся в равновесии пружиной, другой конец которой неподвижно закреплен (рис.7). Снаружи цилиндра – вакуум. Над этим газом требуется провести циклический процесс 1–2–3–1, показанный на pV -диаграмме. Для этого разрешается медленно нагревать и охлаждать газ, а также заменять пружину при переходе к каждому следующему участку процесса. Найдите жесткости и начальные и конечные удлинения пружин, необходимых для реализации данного процесса. Значения давлений и объемов газа в состояниях 1, 2 и 3 считать известными.

О. Шведов

11 класс

1. Прямоугольная рама образована тремя парами пружин с разными жесткостями (рис.8). Все пружины не деформированы и в углах рамы шарнирно соединены друг с другом. Известно отношение длинной и короткой сторон рамы: $a/b = 25$ и отношение жесткостей диагональных и поперечных пружин $k_3/k_2 = 100$. Раму растягивают, прикладывая к ней четыре одинаковые силы вдоль длинной стороны, как показано стрелками на рисунке. При этом длина рамы a увеличивается на $\Delta a = 0,001a$. Найдите относительные изменения ширины рамы $\Delta b/b$ и ее площади $\Delta S/S$ при таком растяжении.

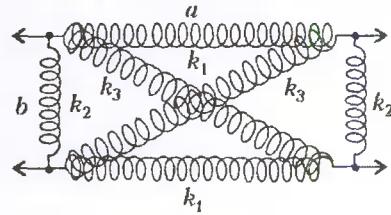


Рис. 8

В. Птушенко

2. Маленький заряженный шарик массой m шарнирно подвешен на невесомом непроводящем стержне длиной l . На расстоянии $1,5l$ слева от шарнира находится вертикальная заземленная металлическая пластина больших размеров. Стержень отклоняют от вертикали вправо на угол α и отпускают без начальной скорости. В ходе начавшихся колебаний стержень достигает горизонтального положения, после чего движется обратно, и процесс повторяется. Найдите заряд шарика. Ускорение свободного падения равно g .

Д. Ягнятинский

Второй теоретический тур

8 класс

1. На длинном шоссе на расстоянии 1 км друг от друга установлены светофоры. Красный сигнал каждого светофора горит в течение 30 секунд, зеленый – в течение следующих 30 секунд. При этом все автомобили, движущиеся со скоростью 40 км/ч, проехав один из светофоров на зеленый свет, проезжают без остановки, т.е. тоже на зеленый свет, и все следующие светофоры. С какими другими скоростями могут двигаться автомобили, чтобы, проехав один светофор на зеленый свет, далее нигде не останавливаться?

О. Шведов

2. Для того чтобы измерить подъемную силу воздушного шарика, Вася использовал два тонких невесомых рычага I и II, оси которых O_1 и O_2 параллельны (рис.9). Рычаги горизонтальны и имеют область «перекрывтия» длиной x . К свободному концу рычага I Вася привязал шарик, а на свободный конец рычага II поставил гирию массой M . Какой должна быть подъемная сила F шарика, чтобы он мог перетянуть гирию? А какой она должна быть, чтобы гирия

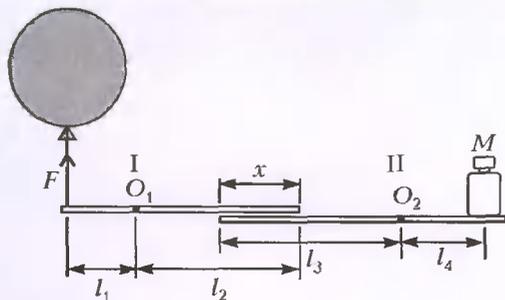


Рис. 9

перетянула шарик? Расстояния l_1 , l_2 , l_3 и l_4 считать известными.

Д.Харабадзе

3. U-образная трубка заполнена водой плотностью ρ (рис.10). Узкое колено этой трубки площадью сечения S закрыто невесомым поршнем, к которому привязана нить, перекинутая через неподвижный и подвижный блоки. Широко

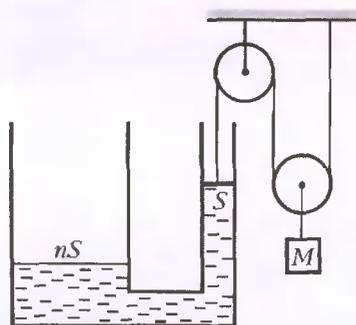


Рис. 10

колено трубки, площадь сечения которого в $n = 2$ раза больше, чем у узкого, открыто. К оси подвижного блока подвешен груз массой M , и система находится в равновесии. На какое расстояние сдвинется груз, если в открытое колено трубки долить

воду массой m , а к грузу массой M прикрепит дополнительный груз массой m ? Считать, что поршень все время касается поверхности воды, трения нет, нить и блоки невесомы.

О.Шведов

9 класс

1. На горизонтальной поверхности стоит круглое пластмассовое блюдце с нижним и верхним радиусами $R_1 = 6$ см и $R_2 = 8$ см и массой $m = 5$ г (рис.11). На край блюдца и стол опирается металлический нож массой M , центр тяжести которого расположен на середине его длины. Какую долю от длины ножа может составлять его часть, нависающая над блюдцем, чтобы система оставалась в равновесии? Решите задачу при $M = 10$ г, $M = 20$ г и $M = 40$ г. Трение между ножом и поверхностью стола отсутствует, а коэффициент трения между ножом и блюдцем достаточно большой, так что он не скользит по блюдцу.

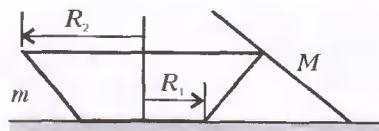


Рис. 11

2. На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом 45° при основании (рис.12). По его наклонной грани может двигаться без трения небольшое тело массой m . Чему должна быть равна и куда (вправо или влево) направлена горизонтальная сила, приложенная к клину, чтобы ускорение тела массой m было направлено: а) вертикально; б) горизонтально; в) под углом 45° к вертикали? Клин не опрокидывается, ускорение свободного падения равно g .

В.Птушенко

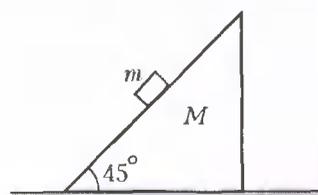


Рис. 12

зонтальная сила, приложенная к клину, чтобы ускорение тела массой m было направлено: а) вертикально; б) горизонтально; в) под углом 45° к вертикали? Клин не опрокидывается, ускорение свободного падения равно g .

А.Зильберман

3. Внутри куска льда без воздушных пузырей находится вмёрзший камень, плотность которого $\rho_k = 2000$ кг/м³, т.е. вдвое больше, чем у воды ($\rho_v = 1000$ кг/м³). Масса куска льда вместе с камнем $M = 3$ кг, а температура равна 0°C . Этот кусок льда опустили в ведро объемом $V = 10$ л с водой, причем оказалось, что ведро заполнено по самые края, а над поверхностью воды выступает только 5% от общего объема куска льда с камнем. Через некоторое время после того, как часть льда растаяла, кусок льда полностью погрузился в воду и продолжал плавать, не касаясь в течение длительного времени ни дна, ни стенок ведра. Найдите массу камня и температуру воды в ведре до опускания в него куска льда. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг·°C), плотность льда $\rho_l = 900$ кг/м³, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг. Теплообменом с окружающей средой и тепловым расширением тел пренебречь.

С.Варламов

4. Прибор для измерения сопротивлений состоит из батарейки напряжением $\mathcal{E}_0 = 4,5$ В, резистора сопротивлением $R = 10$ Ом и амперметра, соединенных так, как показано на рисунке 13,а. На амперметр нанесена шкала, показывающая значение сопротивления резистора, подключаемого к клеммам 1 и 2. С помощью данного прибора пытаются измерить сопротивление электрической цепи, изображенной на рисунке 13,б, которая состоит из источника напряжения и резистора. Оказалось, что показания прибора

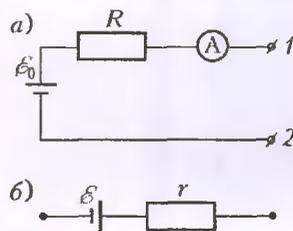


Рис. 13

зависят от полярности подключения к нему этой цепи: в одном направлении показание прибора равно $r_1 = 20$ Ом, в другом — $r_2 = 5$ Ом. Найдите напряжение \mathcal{E} источника и сопротивление r резистора. Батарейка, источник напряжения и амперметр имеют пренебрежимо малые внутренние сопротивления.

О.Шведов

10 класс

1. Две одинаковые дощечки плывут вдоль берега по прямому широкому каналу, вода в котором течет с постоянной скоростью, одинаковой по всей ширине канала. В некоторый момент времени им сообщили скорость относительно воды, равную по величине $v_0 = 1$ м/с. При этом скорость первой дощечки оказалась перпендикулярной берегу в связанной с ним неподвижной системе отсчета, а скорость второй дощечки оказалась перпендикулярной берегу в системе отсчета, связанной с водой. Через достаточно большое время, когда движение дощечек относительно воды прекратилось, расстояние от первой дощечки до берега увеличилось на $s_1 = 4$ м, а от второй — на $s_2 = 5$ м. Найдите скорость течения воды в канале.

К.Дмитриев

2. Найдите ускорение груза массой m_1 в системе, изображенной на рисунке 14. Блоки невесомы, нить невесома, нерастяжима и не проскальзывает по верхнему двухступенчатому блоку с радиусами r и R . Один конец нити закреплен

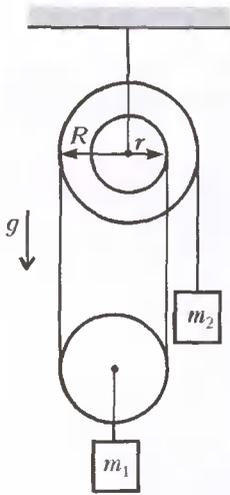


Рис. 14

на этом блоке, к другому концу прикреплен груз массой m_2 . Участки нити, не лежащие на блоках, вертикальны, трение в осях блоков и о воздух отсутствует, ускорение свободного падения равно g .

М. Семенов

3. Идеальный одноатомный газ находится в гладком вертикальном цилиндре под невесомым поршнем, на котором стоит груз массой m . Снаружи цилиндра – вакуум, теплообмен газа с окружающими телами отсутствует. Над газом совершают процесс, состоящий из n стадий, на каждой из которых массу груза увеличивают в одно и то же число раз по сравнению с предыдущим значением, и дожидаются установления равновесия. Конечная масса груза равна

M . Во сколько раз изменится объем газа после завершения этого процесса? Решите задачу в общем случае и затем получите приближенный ответ для $n = 2004$, $M/m = 4\sqrt{2}$. Ускорение свободного падения равно g , действием сил тяжести на газ можно пренебречь. *Примечание:* при малых ϵ и $\lambda\epsilon \ll 1$ справедливо соотношение $(1 + \epsilon)^\lambda \approx 1 + \lambda\epsilon$.

О. Шведов

4. Два школьника на уроке физики собрали самодельные приборы для измерения сопротивлений – омметры, состоящие из последовательно соединенных батарейки, резистора и амперметра, причем эти элементы у каждого школьника были разные. Потом они откалибровали свои приборы, подключая к ним резисторы с известными сопротивлениями, и нанесли на шкалы амперметров эти значения сопротивлений. Далее школьники решили вместе измерить неизвестное сопротивление R_x резистора, одновременно подключив параллельно к нему оба своих прибора с соблюдением одинаковой полярности батареек. При этом один прибор показал значение сопротивления R_1 , а второй – R_2 . Каково истинное значение R_x ?

Д. Харабадзе

11 класс

1. Два однородных концентрических обруча жестко скреплены невесомым стержнем AB и могут вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг неподвижной горизонтальной оси O , проходящей через их центр (рис. 15). К обручам прикреплены легкие упругие нити, другие концы которых неподвижно закреплены на потолке и стене. Масса и радиус внутреннего обруча равны m и R , а внешнего $2m$ и $2R$ соответственно. В начальном

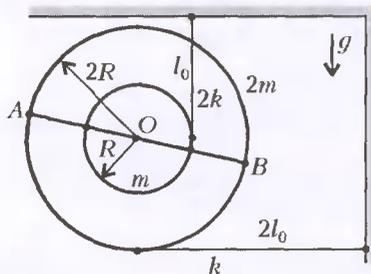


Рис. 15

положении системы, когда обе нити не растянуты, длина вертикальной нити l_0 , а горизонтальной $2l_0$. Коэффициент упругости на растяжение у горизонтальной нити k , у вертикальной $2k$. Обручи поворачивают из начального положения по часовой стрелке на угол α_0 и отпускают без начальной скорости. Найдите период колебаний системы, считая, что нити абсолютно

гибкие, гладкие и при растяжении они наматываются на обручи.

Д. Ягнятинский

2. Цикл теплового двигателя, в котором в качестве рабочего тела используется один моль идеального одноатомного газа, состоит из трех участков – изобарического, изохорического и адиабатического, причем отношение максимального объема газа к его минимальному объему в этом цикле $n = 8$. Найдите, какое наибольшее значение может принимать коэффициент полезного действия двигателя, работающего по такому циклу, если при адиабатическом процессе объем V и давление p данного газа удовлетворяют соотношению $pV^{5/3} = \text{const}$.

В. Погожев

3. Пластины плоского конденсатора подключены к батарее с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r . Пластины располагают вертикально и подносят к их нижним краям широкий сосуд с жидкостью плотностью ρ_1 и диэлектрической проницаемостью ϵ_1 . При этом жидкость начинает втягиваться в конденсатор. За время установления равновесия в системе в ней выделяется количество теплоты Q . Какое количество теплоты выделилось бы в данной системе, если бы жидкость в сосуде имела плотность ρ_2 и диэлектрическую проницаемость ϵ_2 ? Поверхностным натяжением пренебречь.

А. Якута

4. Катушка индуктивности состоит из железного сердечника и намотанной на него проволоки. Катушка подключена к источнику переменного напряжения $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Индуктивность катушки L , а ее омическое сопротивление $10^3 \omega L$. За один период изменения напряжения за счет потерь на перемагничивание железа в сердечнике выделяется количество теплоты, пропорциональное максимальной величине энергии магнитного поля, запасенной в катушке. Коэффициент пропорциональности $k = 2\pi \cdot 10^{-3}$. Какая средняя мощность потребляется катушкой от источника?

С. Варламов

5. Имеется n плоских стеклянных пластинок. При нормальном падении параллельного пучка света на k -ю пластинку от нее отражается доля α_k , поглощается доля β_k и пропускается доля γ_k падающей энергии ($\alpha_k + \beta_k + \gamma_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$) независимо от того, на какую сторону пластинки падает свет. Какая доля энергии света будет отражаться, поглощаться и пропускаться при его падении на систему из всех n пластинок, установленных друг за другом нормально к пучку света? Решите задачу для следующих частных случаев:

а) $n = 2$, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ – любые;

б) $n = 3$, $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k = 1/3$.

Интерференцию света не учитывать.

О. Шведов

Публикацию подготовили
М. Семенов, А. Якута

К М Ш

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Заменяем букву О нулем, тогда второе равенство будет верным при любой допустимой замене одинаковых букв цифрами, а первое сведется к равенству $D + K + P = A + Y + B + L + I + T$. Положим $T = 1$, тогда оставшиеся восемь цифр в сумме составят $45 - 1 = 44$. Несложно разделить восемь цифр на две группы с суммой цифр в каждой группе 22, например:

$$9 + 8 + 5 = 6 + 7 + 4 + 3 + 2.$$

2. Да, может, если распределение числа успешных выстрелов и числа патронов по этапам будет таким:

		I этап	II этап
I спортсмен	число успешных выстрелов	6	5
	число патронов	14	6
II спортсмен	число успешных выстрелов	4	8
	число патронов	10	10

Задача допускает, например, следующее любопытное обобщение. Пусть каждому спортсмену вначале выдают $4n$ патронов, $n \geq 10$. Исследуемая ситуация возникает при таком распределении числа успешных выстрелов и числа патронов по этапам:

		I этап	II этап
I спортсмен	число успешных выстрелов	n	$n - 6$
	число патронов	$n + 3$	$3n - 3$
II спортсмен	число успешных выстрелов	$n + 3$	$n - 8$
	число патронов	$n + 7$	$3n - 7$

3. Да, существует. Например: 999899874.

В принципе, привести пример – этого достаточно. Но имеет смысл показать хотя бы в общих чертах, как такое число нащупать.

Ясно, что в числе будут присутствовать не все возможные цифры от 1 до 9. Поэтому наверняка девятки в нем будут (на местах отсутствующих цифр).

Далее, скорее всего, в числе должны быть и цифры, встречающиеся в единственном экземпляре, поэтому на соответствующих местах будут восьмерки. Сколько же восьмерок может быть? Если всего одна, то тогда на восьмом месте должна стоять эта самая восьмерка, «говорящая сама о себе», и больше восьмерок быть не может, т.е. никакая другая цифра ровно один раз не встречается – а это вряд ли возможно. Так что

имеет смысл предположить, что восьмерок хотя бы две. И если их, скажем, ровно две, то это уже вполне приемлемо: тогда на восьмом месте стоит семерка, а упомянутые две восьмерки «говорят» о том, что имеется ровно одна семерка и еще ровно одна цифра, показывающая количество не девяток (а таковых получается 4). Осталось только записать результат.

4. Не может.

Предположим, что шестиугольник может накрывать половину периметра круга, тогда диаметр круга будет лежать на прямой MN , проходящей через общие точки круга и шестиугольника (рис.1).

Отразим накрываемую кругом часть шестиугольника относительно этой прямой (рис.2). В результате она окажется внутри другой части шестиугольника, поэтому ее периметр заведомо меньше периметра этой большей части.

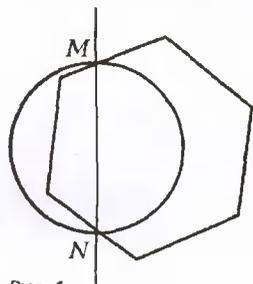


Рис. 1

5. Да, следует. Если предположить противное, то среди некоторых зверюшек одинаковой пушистости найдется барабашка **б** и зверь **з**, не являющийся барабашкой, менее крикливый, чем **б**. Пусть **Б** – барабашка одинаковой со зверем **з** крикливости. Тогда **Б** более пушистый, чем **з**, и, значит, **Б** более пушистый, чем **б**. Но тогда **Б** более криклив, чем **б**, и, значит, **Б** более криклив, чем **з**. Противоречие.

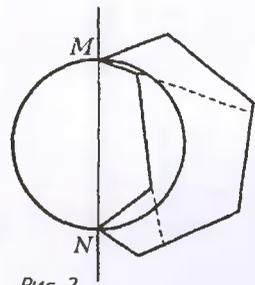


Рис. 2

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №1)

16. Докажем, что профессору Мумбуму-Плюмбуму не удастся составить требуемое число.

Назовем n -цепочкой цепочку цифр, стоящих между двумя крайними цифрами n , где $n = 2, 3, \dots, 9$, при этом крайние цифры n также включаем в n -цепочку.

Несложно проверить, что 6-цепочка и 8-цепочка могут перекрываться не более чем по 8 позициям. Поскольку 6-цепочка занимает 26 позиций, а 8-цепочка – 22 позиции, то эти две цепочки занимают не менее 40 позиций. Всего искомое число должно занимать 45 позиций, поэтому не занятыми 6- и 8-цепочками может быть самое большее 5 позиций. 7-цепочка занимает 25 позиций, однако с 8-цепочкой она может перекрываться не более чем по 6 позициям, а с 6-цепочкой – не более чем по 12 позициям. В любом случае для 7-цепочки в искомом числе места нет.

17. Внимательно проанализируем описанное в условии преобразование. Итак, пусть даны 3 точки P, Q и R , и мы поворачиваем отрезок PQ относительно его середины на какой-то угол. Обозначим эту середину буквой M . Тогда RM – медиана треугольника PQR , и каков бы ни был угол поворота, она останется этой медианой (причем оба ее конца тоже остаются неподвижными). Поэтому точка, делящая медиану в отношении $2 : 1$, считая от вершины R , также неподвижна при повороте отрезка PQ относительно его середины. Но эта точка – точка пересечения медиан треугольника PQR . Поэтому можно утверждать: при данном преобразовании точка пересечения медиан остается неподвижной, сколько бы раз преобразование не производилось и какие бы вершины ни выбирались. Следовательно, точка пересечения медиан исходного треугольника ABC осталась на месте.

Допустим, что точка C совпала с исходным положением точки A . Тогда получается, что две вершины «итогового» треугольника совпали с двумя исходными вершинами. Точка пересечения медиан, как мы знаем, тоже должна совпасть. Однако две вершины и точка пересечения медиан однозначно определяют треугольник и, следовательно, положение третьей вершины. Значит, вершина B также должна совпасть с исходным положением третьей вершины, т.е. точки C , что противоречит условию. Следовательно, предположение было неверным, и точка C не может совпасть с исходным положением точки A .

18. Укажем такие не имеющие корней квадратные трехчлены P и Q , что $P + Q = ax^2 + bx + c$.

Если исходный трехчлен не имеет корней, то можно взять

$$P = Q = \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{c}{2}.$$

Если исходный трехчлен имеет корни, то сначала выделим из него полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a} - c\right).$$

Заметим, что $a\left(\frac{b^2}{4a} - c\right) \geq 0$ (иначе трехчлен не имеет корней). Если $a > 0$, то можно положить

$$P = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - c\right) + 1,$$

$$Q = -a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - 2\left(\frac{b^2}{4a} - c\right) - 1;$$

если же $a < 0$, то

$$P = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{4a} - c\right) - 1,$$

$$Q = -a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - 2\left(\frac{b^2}{4a} - c\right) + 1.$$

Несложно проверить, что $P + Q = ax^2 + bx + c$ и трехчлены P и Q в каждом из рассматриваемых случаев не имеют корней.

19. Число a , удовлетворяющее условию задачи, существует. Для того чтобы число $aa = \frac{100\dots 01}{100 \text{ цифр}} a$ разделилось на $a \cdot a$,

необходимо, чтобы на a разделилось число $100\dots 01$, образованное из 100 цифр. Поскольку a — число 99-значное, то частным от такого деления может быть только 7.

Имеем: $\frac{100\dots 01}{100 \text{ цифр}} : 7 = \frac{142857142857\dots 142857143}{99 \text{ цифр}} = a$.

20. Пусть a, b, c, d — числа, стоящие в одной строке таблицы. Поскольку $a + b + c \neq b + c + d$, то $a \neq d$, а из условия $b + c + d \neq c + d + e$ следует $b \neq e$. Значит, числа a и d , точно так же, как и числа b и e , не могут быть равными нулю одновременно. Отсюда вытекает, что в первом и четвертом столбцах таблицы не может стоять больше 5 нулей, точно так же не может быть больше 5 нулей во втором и пятом столбцах таблицы. Рассмотрим средний столбец таблицы. Из соображений, аналогичных предыдущим, вытекает, что в этом столбце не больше 2 нулей. Итак, во всей таблице не больше 12 нулей, значит, наименьшее возможное количество положительных чисел 13. Такой вариант реализуется.

	×		×	
×		×		×
	×	×	×	
×		×		×
	×		×	

Если расставить степени двойки $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{12}$ в любом порядке на места, указанные крестиками на рисунке 3, мы получим таблицу, удовлетворяющую условию задачи.

Рис. 3

Автостоянки, перестановки и деревья

2. Указание. Если $F = 0$, то исходное утверждение — следствие теоремы 1. Осталось воспользоваться тем, что на циклической автостоянке все числа от 0 до n равноправны.

3. Указание. Для бесконфликтной последовательности a_1, a_2, \dots, a_n обозначьте через $\sigma(k)$, где $1 \leq k \leq n$, номер места, на которое встает k -я машина.

4. а) 594781362; б) 293614578.

5. а) 4, 1, 2, 1; б) 6, 1, 6, 7, 2, 3, 2, 2, 1.

1 2 3 4 1 2 3 4 5 6 7 8 9

6. а) ↓ ↓ ↓ ↓; б) ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓.

1 4 2 3 9 8 7 6 3 5 4 1 2

7. $(n!)!$.

9. В самом деле, любое число k , где $1 \leq k \leq n$, мы ставим на такое место $\sigma(k) = j$, что слева от него остается $b_k - 1$ еще не занятых мест. Если i -е место, где $i < j$, в этот момент занято, то числа, встающие на места i и j , беспорядка не образуют. Если же i -е место свободно, то в дальнейшем на него

будет поставлено число, большее k , и возникнет инверсия. Таким образом, общее число инверсий равно

$$(b_1 - 1) + (b_2 - 1) + \dots + (b_n - 1) = b_1 + b_2 + \dots + b_n - n.$$

10. а) $n - 1$; б) $(n + 1)(n - 2)/2$.

11. Указания. а) Перепишите нижнюю строку перестановки в обратном порядке.

б) Выведите это из пункта а) или из теоремы 3.

«Досье» на окружность Аполлония

2. $\sqrt{4k^2 - n^2}$. 3. $\frac{mn}{m - n}$.

4. Окружность с центром на прямой AC .

Соотношения между средними величинами

1. Из $(b - a)^2 \geq 0$ следует $(a + b)^2 \geq 4ab$, откуда $\frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$.

2. Из предыдущего упражнения следуют неравенства

$$a_{n+1} \leq \sqrt{a_n \cdot b_n} \leq b_{n+1}, \quad b_{n+1} = (a_n + b_n)/2 \leq b_n,$$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \geq a_n,$$

т.е. обе последовательности сходятся. Пусть $\{a_n\}$ сходится к α , а $\{b_n\}$ — к β . Из $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ в пределе получаем $\alpha = (\alpha + \beta)/2$, откуда $\alpha = \beta$. Поскольку $ab = a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots = a_n b_n = \dots = \alpha^2$, то $\alpha = \sqrt{ab}$.

3. Из $\ln \Delta_s(a, b) = \frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}$ следует

$$\lim_{s \rightarrow 0} \ln \Delta_s(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\ln(a^s + b^s) - \ln 2}{s} =$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{a^s \ln a + b^s \ln b}{a^s + b^s} = \frac{1}{2} (\ln a + \ln b) = \ln \sqrt{ab}.$$

(Здесь использовано правило Лопиталья—Бернулли:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{g(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f'(s)}{g'(s)}.)$$

4. Пусть точка x_3 делит отрезок $[x_1; x_2]$ в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$, тогда $(x_3 - x_1) : (x_2 - x_3) = \lambda_1 : \lambda_2$, откуда

$$x_3 = p_1 x_1 + p_2 x_2, \quad \text{где } p_1 = \lambda_2 / (\lambda_1 + \lambda_2), \quad p_2 = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2).$$

7. а) Пусть $M_1 N_1$ — отрезок, проходящий через точку O пересечения диагоналей (см. рис. 3 статьи), x и y — отрезки, на которые он делится точкой O . Рассмотрев две пары подобных треугольников, получим $x : b = a : (a + b)$. Отсюда $x = ab / (a + b)$; аналогично $y = ab / (a + b)$.

б) Отрезок $M_2 N_2$ делит трапецию на подобные трапеции, поэтому $a : M_2 N_2 = M_2 N_2 : b$.

в) Для средней линии имеем $M_3 N_3 = (a + b)/2$.

г) Отрезок $M_4 N_4$ делит трапецию на равновеликие трапеции. Если h_1 и h_2 — высоты этих трапеций, z — длина $M_4 N_4$, то $h_1(a + z)/2 = h_2(z + b)/2 = (h_1 + h_2)(a + b)/4$. Исключив из этой системы h_1 и h_2 , найдем $z = \sqrt{(a^2 + b^2)/2}$.

8. Из пропорции $(x_3 - x_1) : (x_2 - x_1) = (y_3 - f(x_1)) : (f(x_2) - f(x_1))$ получаем $y_3 = p_2 f(x_2) + p_1 f(x_1)$.

10. Площадь $S = xy \leq ((x + y)/2)^2 = (p/4)^2$, где p — периметр прямоугольника; $S_{\max} = (p/4)^2$ достигается при $x = y$.

11. Периметр $p = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} + \sqrt{x^2 + y^2} =$

$= c(1 + \sqrt{2})$, где c – гипотенуза. Максимальное значение периметра p принимает при $x = y$.

12. Объем $V \leq xyz \leq ((x + y + z)/3)^3 = (p/3)^3$. Первое неравенство переходит в равенство, если параллелепипед прямоугольный, второе – при $x = y = z$.

13. Так как $xy = 4$ и $xyz = 12$, то $z = 3$ и $S = 8 + 6(x + y) \geq 8 + 12\sqrt{xy} = 32$. Равенство достигается при $x = y = 2$.

14. Обозначим $f(x, y) = 16x^3/y + y^3/x - \sqrt{xy}$. Поскольку $xy > 0$, то $a = 16x^3/y > 0$, $b = y^3/x > 0$. Применяя неравенство $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, получим $f(x, y) \geq 2\sqrt{16x^2y^2} - \sqrt{xy}$. Положим $\sqrt{xy} = t$, тогда $f(x, y) \geq 8t^2 - t$. Функция $8t^2 - t$ имеет минимальное значение в точке $t = 1/16$, равное $-1/32$. В результате $f(x, y) \geq -1/32$. Равенство достигается лишь в случае $a = b$, т.е. при $y = 2x$. Итак, минимальное значение, равное $-1/32$, функция $f(x, y)$ принимает при $x = \sqrt{2}/32$, $y = \sqrt{2}/16$.

15. а) Функция $f(x) = e^x$ выпукла на всей числовой оси. Неравенство Йенсена для нее имеет вид $e^{p_1x_1 + \dots + p_nx_n} < p_1e^{x_1} + p_2e^{x_2} + \dots + p_ne^{x_n}$. Положив в нем $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1/n$ и обозначив $e^{x_k} = a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, получаем искомое неравенство.

б) При $s > 1$ функция $f(x) = x^s$ выпукла на положительной полуоси, а поэтому $(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n)^s \leq$

$$\leq p_1x_1^s + p_2x_2^s + \dots + p_nx_n^s. \text{ При } p_1 = \dots = p_n = 1/n \text{ и } x_k = a_k \text{ получим } \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^s \leq \frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n}. \text{ Отсюда } \Delta_1 \leq \Delta_s.$$

Все рассуждения остаются в силе и при $s < 0$, мы приходим к тому же неравенству, а учитывая $s < 0$, будем иметь $\Delta_1 \geq \Delta_s$. При $s \in (0; 1)$ функция выпукла вверх, поэтому неравенство Йенсена заменится на противоположное, откуда $\Delta_s \leq \Delta_1$.

16. Неравенство $\sum (a_kx + b_k)^2 \geq 0$ (суммирование ведется по k от 1 до n) верно при любых x , т.е.

$$x^2 \sum a_k^2 + 2x \sum a_k b_k + \sum b_k^2 \geq 0. \text{ Следовательно, дискриминант квадратного трехчлена меньше или равен 0:}$$

$$\left(\sum a_k b_k\right)^2 - \sum a_k^2 \sum b_k^2 \leq 0. \text{ Неравенство Коши доказано. Далее достаточно положить в нем } b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1.$$

17. Пусть R – радиус окружности, тогда $S_n = R^2 n \operatorname{tg}(\pi/n)$,

$$s_n = (R^2 n / 2) \sin(2\pi/n) \text{ и } s_{2n} = R^2 n \sin(\pi/n) = \sqrt{s_n S_n},$$

$$S_{2n} = 2R^2 n \operatorname{tg}(\pi/(2n)), \text{ откуда}$$

$$\frac{1}{s_{2n}} + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{R^2 n} \frac{1 + \cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)} = \frac{2}{S_{2n}}$$

Магнитное поле

1. 1) $B = 0$; 2) $B = \frac{\mu_0 q I}{2\pi r} = 2 \cdot 10^{-12}$ Тл; 3) $B = 0$.

2. $I = \frac{4 Mg}{3 aB}$. 3. $U_{AC} = \frac{\omega BR^2}{2} = 0,3$ В. 4. $v = \frac{\sqrt{3} a^2 B_0^2}{112 \rho M}$.

LXVII Московская математическая олимпиада

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

6 класс

1. Да. Указание: $5 \cdot 5 - 8 = 17$.

2. 160 граммов.

Пусть в килограмме говядины x кг костей, тогда «чистой» говядины в нем $(1 - x)$ кг. Таким образом, $15x + 90(1 - x) = 78$, откуда $x = 0,16$.

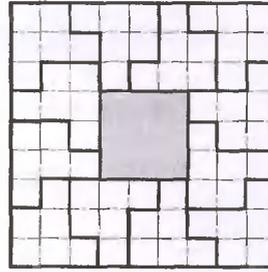


Рис. 4

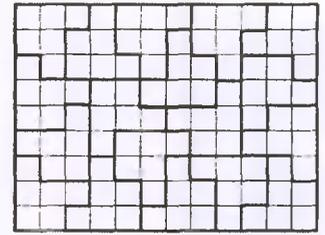


Рис. 5

3. Да. Например: $\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}$. Скорее всего, другого примера нет, но доказывать это мы не умеем.

4. См. рис.4 и 5.

5. СТЕРЛИТАМАК.

Мы будем постепенно восстанавливать Сашину вторую таблицу. Заметим сначала, что каждая буква встречается в каждом столбце столько же раз, сколько раз она встречается в слове. Так как слова в таблице упорядочены по алфавиту, то в первом столбце буквы слова стоят в алфавитном порядке: А, А, Е, И, К, Л, М, Р, С, Т, Т (таблица 1).

В циклических сдвигах слова после его последней буквы идет первая. Из первой строки таблицы 1 видно, что после буквы М идет буква А, из второй и третьей – что после буквы Т один раз идет А, а один раз – Е, и т.д. Так как слова упорядочены по алфавиту, то в строчках с одинаковой первой возможными вторые буквы упорядочены по алфавиту. Воспользовавшись этим, мы можем заполнить и второй столбец (таблица 2). Из получившейся таблицы видно, что после пары букв МА идет буква К (первая строчка), после пары ТА идет М (вторая строчка) и т.д.

Таблица 1

А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	М
А	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
Е	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
И	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Л
К	*	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Л	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Р
М	*	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Р	*	*	*	*	*	*	*	*	*	Е
С	*	*	*	*	*	*	*	*	*	К
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	И
Т	*	*	*	*	*	*	*	*	*	С

Таблица 2

А	К	*	*	*	*	*	*	*	*	М
А	М	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
Е	Р	*	*	*	*	*	*	*	*	Т
И	Т	*	*	*	*	*	*	*	*	Л
К	С	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Л	И	*	*	*	*	*	*	*	*	Р
М	А	*	*	*	*	*	*	*	*	А
Р	Л	*	*	*	*	*	*	*	*	Е
С	Т	*	*	*	*	*	*	*	*	К
Т	А	*	*	*	*	*	*	*	*	И
Т	Е	*	*	*	*	*	*	*	*	С

Можно, пользуясь этой информацией, заполнить третий столбец, потом четвертый и т. д., пока не заполнится вся таблица. Но для решения задачи достаточно восстановить третью строку.

зу строку (так как название города начинается с буквы С), что несложно сделать, зная, какая буква идет за какой парой букв.

7 класс

1. Только на 7.

Очевидно, что последняя цифра больше 1. Трехзначное простое число не может оканчиваться ни на четную цифру (т. е. на 0, 2, 4, 6 или 8), ни на цифру 5. Если последняя цифра 3 или 9, то сумма всех цифр числа, равная удвоенной последней цифре, делится на 3, а тогда само число делится на 3. Таким образом, осталась только цифра 7.

Замечание. Есть четыре числа, удовлетворяющих условию задачи: 167, 257, 347, 527 (приводить примеры таких чисел в решении не требовалось).

2. Да (рис.6).

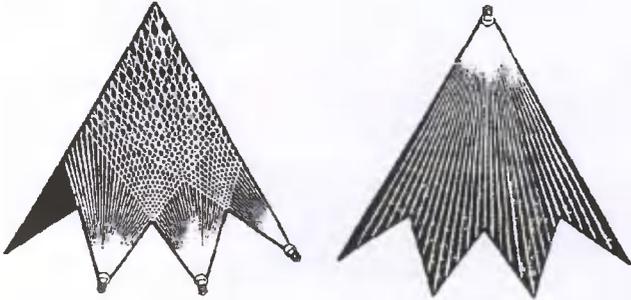


Рис. 6

Замечание. Такое возможно, даже если заменить число 3 на любое другое сколь угодно большое число.

3. Например: $\frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \frac{6}{11}$.

4. СОСНОГОРСК. Решение аналогично решению задачи 5 для 6 класса.

6. 24 мин.

Будем откладывать по оси абсцисс время (в минутах), а по оси ординат – расстояние от Цветочного города (в километрах). Так как скорость автомобиля постоянна, то график его движения – прямая. При этом Незнайка не может проезжать переезд, расположенный на втором километре шоссе, пока не истекнут три минуты (когда он закрыт), а также на седьмой – девятой минутах, на тринадцатой – пятнадцатой минутах и т.д. Графически это означает, что прямая не может

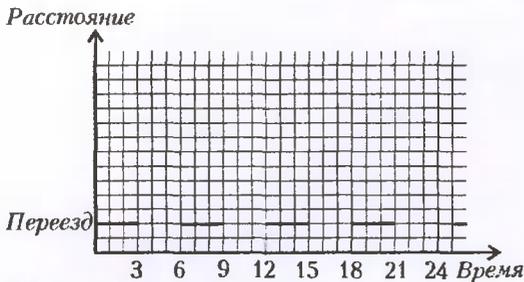


Рис. 7

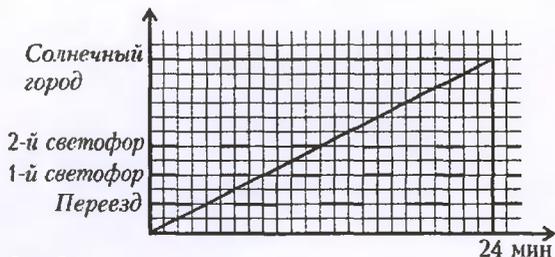


Рис. 8

пересекать выделенные отрезки (рис.7). Аналогично можно отметить отрезки, которые запрещено пересекать из-за красного света светофоров (рис.8). Для получения ответа осталось из начала координат провести прямую, которая не пересекает ни один из выделенных отрезков и пересекает горизонтальную прямую $y = 12$ как можно раньше.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ СТАРШИХ КЛАССОВ

1. Нет. После k повышений и l понижений курс акций умножится на

$$\left(1 + \frac{n}{100}\right)^k \left(1 - \frac{n}{100}\right)^l.$$

Приведем $\frac{n}{100}$ к несократимому виду $\frac{p}{q}$, где $q > p \geq 1$. Тогда

$1 + \frac{n}{100} = \frac{q+p}{q}$, $1 - \frac{n}{100} = \frac{q-p}{q}$. Так как дробь $\frac{p}{q}$ несократима, то дробь $\frac{(q+p)^k (q-p)^l}{q^{k+l}}$ также несократима, а значит, не равна единице.

2. а) Искомые семь многоугольников – это треугольники, определенные парами соседних сторон выпуклого семиугольника $ABCDEFG$. Рассмотрим какие-нибудь шесть из них, например все, кроме треугольника GAB . Их можно прибить двумя гвоздями (в точках F и C). Но так как гвоздь прибывает не более трех треугольников, двумя гвоздями можно прибить не более шести треугольников.

б) Рассмотрим правильный семиугольник $ABCDEFG$. Искомые восемь многоугольников – это четырехугольники $ABCD$, $BCDE$, $CDEF$, $DEFG$, $EFGA$, $FGAB$, $GABC$ и семиугольник в центре, ограниченный диагоналями AD , BE , CF , DG , EA , FB и GC . Семь четырехугольников можно прибить двумя гвоздями в точках A и E . Центральный семиугольник и 6 четырехугольников, например $CDEF$, ..., $ABCD$ (без $BCDE$), можно прибить двумя гвоздями в точках H и F (H – центр семиугольника). Теперь предположим, что все восемь многоугольников можно прибить двумя гвоздями. Тогда один из гвоздей прибывает центральный семиугольник. В таких случаях этот гвоздь прибывает не более двух четырехугольников. Значит, оставшийся гвоздь должен прибить не менее пяти четырехугольников, что невозможно.

3. Если в горизонтальном ряду с дыркой (пустой клеткой) есть вертикальные доминошки, то одну из них можно сделать горизонтальной: сдвинуть горизонтальные доминошки между дыркой и вертикальной доминошкой, после чего повернуть ее. Будем повторять такую операцию, пока дырка не окажется в ряду без вертикальных доминошек. Это верхний ряд, поскольку в остальных рядах четное количество клеток. Передвинем дырку в верхний левый угол и сделаем вертикальной доминошку, оказавшуюся под дыркой. Затем повторим процесс, описанный в предыдущем абзаце, не затрагивая доминошек из первого ряда (включая одну вертикальную). Дырка окажется во втором ряду, причем в нем будет только одна вертикальная доминошка (слева). Передвинем дырку в правый конец второго ряда, сделаем оказавшуюся под ней доминошку вертикальной. Повторяя данный процесс, получим «змею», составленную из всех доминошек. Если «змея переползет на одну клетку вперед», то все доминошки станут горизонтальными.

4. Да. Например: $x^2 + 3x + 2 = 0$. Достаточно заметить, что корнями уравнения $x^2 + (q+1)x + q = 0$ являются числа -1 и $-q$.

5. Пусть шар вернулся в исходную точку A . Обозначим точки отражения через A_1, \dots, A_n . Угол (ненаправленный) между вертикальной прямой и отрезками пути шара не меняется при отражениях. Так как A – вершина внутреннего угла, то шар

вернулся в A по той же прямой, по которой и вылетел. Поэтому $A_1 = A_n$. В силу закона отражения шар прилетел в точку A_1 при последнем отражении по той же траектории, по которой вылетел при первом отражении. Поэтому второй и предпоследний отрезки пути также совпадают, и т.д. Значит, в какой-то момент шар, отразившись, пошел в противоположную сторону, т.е. некоторый (а тогда и каждый) отрезок пути образует угол 0 или 90 градусов с вертикальной прямой. Но тогда шар свалится в лузу после первого отрезка.

6. Пусть $a \leq b \leq c$ – стороны треугольника ABC , I – точка пересечения биссектрис углов A и B . Тогда

$$\frac{I_a}{m_a} + \frac{I_b}{m_b} + \frac{I_c}{m_c} > \frac{I_a}{m_a} + \frac{I_b}{m_b} \geq \frac{I_a + I_b}{c} > \frac{AI + IB}{c} > 1.$$

Второе неравенство справедливо, поскольку любой отрезок внутри треугольника не превосходит наибольшей стороны. Третье неравенство справедливо, поскольку $I_a > AI$ и $I_b > BI$. Четвертое неравенство справедливо по неравенству треугольника для $\triangle AIB$.

Комментарии. Аналогичное утверждение верно для любого набора из шести чевиан (чевиана – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с некоторой точкой противоположащей стороны). Тем более интересно, что приведенная оценка – точная, т.е. число 1 в правой части нельзя заменить на большее (докажите это). При этом оценка не достигается ни на каком треугольнике.

Попытка использовать формулы для биссектрис и медиан треугольника в решении данной задачи заводит в тупик. Отметим также, что в классических неравенствах о средних равенство достигается, когда все слагаемые равны между собой. В данной задаче если $I_a/m_a = I_b/m_b = I_c/m_c$, то $I_a/m_a + I_b/m_b + I_c/m_c = 3$ (докажите это), что далеко от точной оценки 1.

7. Выиграет второй игрок. Пусть p – произведение первых 21 простых чисел. Заметим, что p – наименьшее неразрешенное число. Поскольку 2004! делится на p , то число m , полученное после первого хода первого игрока, не делится на p . Остаток от деления m на p меньше p и потому является разрешенным числом. Второй игрок сможет вычест этот остаток и снова получить число, делящееся на p , и т.д.

8. Да, мог.

а) Не составляет труда угадать 18 карт: первыми двумя рубашками помощник «кодирует» масть второй карты (сопоставив каждой масти один из четырех вариантов расположения двух рубашек), следующими двумя рубашками – масть четвертой и т.д.

Когда в колоде остались две карты, рубашка 35-й карты кодирует порядок, в котором они лежат. Таким способом экстрасенс угадает 19 карт.

б) Покажем, как экстрасенс мог угадать 24 карты. Разделим карты, кроме первой и двух последних, на 11 троек, идущих подряд. Положение первой карты будет указывать, каких мастей в первой тройке больше – черных или красных. Пусть, например, черных больше. Назовем *натуральными* первые две черные карты. Оставшуюся карту назовем *ненатуральной*. Поворотом рубашки каждой из двух натуральных карт помощник покажет, какую из двух черных мастей нужно называть. Поворотом рубашки ненатуральной карты помощник «кодирует» цвет, который чаще встречается в следующей тройке, и т.д. Ненатуральная карта последней тройки кодирует порядок двух последних карт. Тогда экстрасенс угадает их масть (см. конец решения п. а)), а в каждой тройке – не менее 2 мастей, т.е. всего не менее 24 карт.

9. Пусть a и b – первый и n -й члены прогрессии, S – сумма n членов. Тогда $S = \frac{a+b}{2}n$. Значит, $2S$ делится на n . Так как $2S$ – степень двойки, то и n – степень двойки.

10. Да. Например: $\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{7}}$. Это равенство проверяется возведением в квадрат.

Комментарий. Известны следующие формулы сложного радикала:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} \pm \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{2A \pm 2\sqrt{A^2-B}},$$

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

При помощи этих формул можно получить другие решения задачи. Один из участников олимпиады нашел равенство, которое показывает, что числа 2 и 7 можно заменить на любую пару натуральных чисел, не являющихся полными квадратами:

$$\sqrt{mn+n+2m\sqrt{n}} + \sqrt{mn+n-2m\sqrt{n}} + \sqrt{n+1+2\sqrt{n}} + \sqrt{n+1-2\sqrt{n}} = \sqrt{4mn+4n+8n\sqrt{m}}$$

11. *Набросок решения, придуманного школьниками на олимпиаде.* Пусть O – центр описанной окружности, O' – центр вневписанной. Будем считать, что A' лежит на луче CB , а B' – на луче CA . Пусть K – середина дуги AB . Тогда $OK \perp AB$. Значит, $OK \parallel O'C'$. Так как по условию $OK = O'C'$, то $OKO'C'$ – параллелограмм и $OC' \parallel O'K$. Но точки O' , K лежат на биссектрисе угла ACB , которая перпендикулярна прямой $A'B'$. Следовательно, O лежит на высоте треугольника $A'B'C'$, проведенной из вершины C' . Практически так же доказывается, что O лежит на двух других высотах.

12. Обозначим $t = x + \frac{b}{2a}$ и $D = b^2 - 4ac$. Тогда

$$ax^2 + bx + c = a\left(t^2 - \frac{D}{4a^2}\right).$$

При $D \leq 0$ положим $p = \frac{\sqrt{-D}}{2a}$. Тогда

$$a\left(t^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = \frac{a}{2}\left((t-p)^2 + (t+p)^2\right).$$

При $D > 0$ положим $q = \frac{\sqrt{D}}{2a\sqrt{2}}$. Тогда

$$a\left(t^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = a\left(2(t+q)^2 - (t+2q)^2\right).$$

13. а) Да. Пусть a, b, c, d – четыре попарно скрещивающиеся прямые. Построим такие плоскости $\alpha \supset a$, $\beta \supset b$, $\gamma \supset c$ и $\delta \supset d$, что $\alpha \parallel \beta$, $\gamma \parallel \delta$. Спроецируем a на β вдоль направления \vec{v} , не параллельного никакой из четырех плоскостей. Пусть B – точка пересечения этой проекции и прямой b , а $A \in a$ – ее прообраз при проекции. Тогда $AB \parallel \vec{v}$. Аналогично строятся точки $C \in c$ и $D \in d$, для которых прямая CD параллельна \vec{v} . Значит, $AB \parallel CD$. Поэтому либо точки A, B, C и D лежат на одной прямой, либо четырехугольник $ABCD$ – трапеция, либо четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Существует бесконечно много таких направлений \vec{v} , что точки A, B, C и D не лежат на одной прямой. Чтобы исключить случай параллелограмма, достаточно обеспечить неравенство $AB \neq CD$. Заметим, что $AB = \frac{p}{\sin \varphi}$ и $CD = \frac{q}{\sin \psi}$, где p – расстояние между α и β , q – расстояние между γ и δ , φ – угол между \vec{v} и α , ψ – угол между \vec{v} и γ . Если α и γ не параллельны, то найдется направление \vec{v} , для которого $\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} < \frac{p}{q}$, и тогда $AB \neq CD$. Если же $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ парал-

лельны, то $\varphi = \psi$ для любого направления \vec{v} , и достаточно неравенства $p \neq q$, которого можно добиться, переобозначив плоскости.

б) Нет. Возьмем четыре параллельные плоскости, все попарные расстояния между которыми различны. В каждой из них проведем прямую таким образом, чтобы эти прямые попарно скрещивались. Докажем, что параллелограмма с вершинами на этих прямых не существует. Действительно, длины любых двух параллельных отрезков с концами на этих прямых пропорциональны расстояниям между соответствующими парами плоскостей, а значит, различны.

14. $\pi - 2\alpha$ или $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Пусть H – основание высоты, проведенной из вершины B ; указанный в условии диаметр d пересекает контур треугольника в точках N и O ; M – середина стороны AC . Медиана BM делит треугольник на две части одинаковой площади. Если d содержит отрезок BM , то $H = M$, треугольник ABC – равнобедренный и $\angle B = \pi - 2\alpha$. В противном случае d и BM пересекаются в некоторой точке K , поскольку каждый из этих отрезков делит площадь треугольника пополам. Ясно, что площади треугольников $ВОК$ и $МКН$ равны. Тогда площади треугольников $ВОН$ и $ВМН$ равны. Значит, $ВН \parallel ОМ$. Поэтому $ОМ$ – серединный перпендикуляр к хорде AC и является частью диаметра окружности. Точка O принадлежит двум различным диаметрам, поэтому она является центром окружности. Если O лежит на стороне BC , то $\angle A = \frac{\pi}{2} > \alpha$, что невозможно, а если O лежит на стороне AB , то $\angle C = \frac{\pi}{2}$ и $\angle B = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Избранные задачи
Московской физической олимпиады

ПЕРВЫЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. Вездеход вернулся в исходную точку.
2. См. рис. 9 и 10.
3. $t = t_0 + \frac{gh}{c}$.

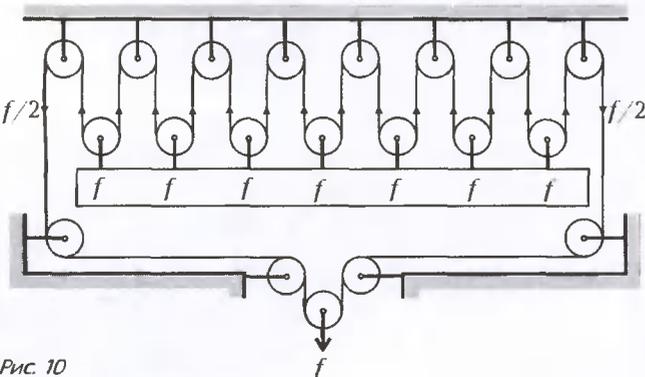
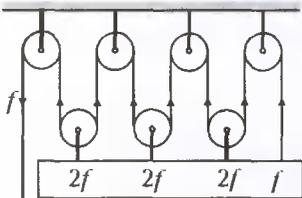


Рис. 10

9 класс

1. $h = \sqrt{l_0^2 - l_2^2}$, $x = l_2$, $v_0 = \sqrt{2g(\sqrt{l_0^2 - l_2^2} + \sqrt{l_1^2 - l_2^2})}$.
2. $\mu_{\min} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
3. $t_{\text{уст}} \approx 20^\circ \text{C}$.
4. $\Delta t = 32$ мин; $R_{\max} = 15$ r.

10 класс

1. $v_{\max} = \sqrt{g \frac{l^2 - H^2}{H}}$.
2. $x_H = \frac{\epsilon S}{2 - \epsilon} \approx \frac{\epsilon S}{2} \approx 1$ см, где $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$.
3. $A = mg(y_3 + \mu x_3)$.
4. $k_{12} = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} S^2$, $k_{23} = \frac{p_3 - p_2}{V_3 - V_2} S^2$, $k_{31} = \frac{p_3 - p_1}{V_3 - V_1} S^2$;
 $\Delta x_{12}^{\text{нач}} = \frac{p_1(V_2 - V_1)}{S(p_2 - p_1)}$, $\Delta x_{12}^{\text{кон}} = \frac{p_2(V_2 - V_1)}{S(p_2 - p_1)}$;
 $\Delta x_{23}^{\text{нач}} = \frac{p_2(V_3 - V_2)}{S(p_3 - p_2)}$, $\Delta x_{23}^{\text{кон}} = \frac{p_3(V_3 - V_2)}{S(p_3 - p_2)}$;
 $\Delta x_{31}^{\text{нач}} = \frac{p_3(V_3 - V_1)}{S(p_3 - p_1)}$, $\Delta x_{31}^{\text{кон}} = \frac{p_1(V_3 - V_1)}{S(p_3 - p_1)}$.

11 класс

1. $\frac{\Delta b}{b} = -\frac{k_3/k_2}{1 + (k_3/k_2)(b/a)^2} \frac{\Delta a}{a} \approx -0,1$,
 $\frac{\Delta S}{S} \approx \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} \approx \frac{\Delta b}{b} \approx -0,1$.
2. $q = 2l \sqrt{\pi \epsilon_0 mg \cos \alpha} \cdot \frac{3 + 2 \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

8 класс

1. $v = \frac{120}{2n+1}$ км/ч, т.е. $v = 120$ км/ч, 40 км/ч, 24 км/ч, ...
2. $F_1 > Mg \frac{l_2}{l_1} \frac{l_4}{l_3 - x}$; $F_2 < Mg \frac{l_4}{l_1} \frac{l_2 - x}{l_3}$.
3. Груз сдвигается вниз на $H = \frac{m}{\rho S} \frac{n+2}{4(n+1)} = \frac{m}{3\rho S}$.

9 класс

1. При $M = 10$ г нависающая над блюдцем доля ножа составляет $k \leq \frac{1}{2}$; при $M = 20$ г $K \leq \frac{1}{3}$; при $M = 40$ г равновесие системы невозможно.
2. а) Сила $F \geq Mg$ и направлена вправо;
 б) сила $F = (m + M)g$ и направлена влево;
 в) сила $F = \frac{mg}{2}$ и направлена влево.
3. $m_k = \frac{M\rho_k}{\rho_k - \rho_1} \left(1 - \frac{\rho_k}{0,95\rho_b}\right) \approx 0,287$ г;
 $t = 16,2^\circ \text{C}$.
4. $\epsilon = \epsilon_0 \frac{r_1 - r_2}{2R + r_1 + r_2} = 1,5$ В; $r = \frac{R(r_1 + r_2) + 2r_1r_2}{2R + r_1 + r_2} = 10$ Ом.

10 класс

$$1. v = v_0 \frac{\sqrt{s_2^2 - s_1^2}}{s_2} = 0,6 \text{ м/с.}$$

$$2. a = g \frac{(m_1(R-r) - 2m_2R)(R-r)}{m_1(R-r)^2 + 4m_2R^2}.$$

$$3. N = \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(\frac{m}{M} \right)^{1/n} \right)^n; \text{ при } n = 2004 \text{ и } \frac{M}{m} = 4\sqrt{2} \text{ объем}$$

уменьшится в $2\sqrt{2} \approx 2,8$ раза.

$$4. R_x = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

11 класс

$$1. T = \left(2\pi + \frac{4 \arctg(l_0/R)}{\alpha_0} \right) \sqrt{\frac{3m}{2k}}.$$

$$2. \eta_{\max} = \frac{3n^{5/3} - 5n + 2}{3(n^{5/3} - 1)} = \frac{58}{93} \approx 0,62 = 62\%.$$

$$3. Q^* = Q \frac{\rho_1 (\epsilon_2 - 1)^2}{\rho_2 (\epsilon_1 - 1)^2} \quad 4. P = 10^{-3} \frac{U_0^2}{\omega L}.$$

$$5. \text{ а) } \alpha = \alpha_1 + \frac{\gamma_1^2 \alpha_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2}, \quad \gamma = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{1 - \alpha_1 \alpha_2}, \quad \beta = 1 - \alpha - \gamma;$$

$$6. \alpha = \frac{8}{21}, \quad \gamma = \frac{1}{21}, \quad \beta = 1 - \alpha - \gamma = \frac{12}{21}.$$

Международная физическая олимпиада
«Гуймаада»

(см. «Квант» №3)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

Первая лига

$$1. R = 33,3 \text{ Ом.}$$

$$2. F_x = \frac{gh\pi D^2 \rho}{4} \cos \alpha, \quad F_y = \frac{gH\pi D^2 \rho}{12} + \frac{gh\pi D^2 \rho}{4} \sin \alpha.$$

$$3. l = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v} v_0, \quad \alpha = \arctg \frac{H}{L}, \quad t = \frac{\sqrt{L^2 + H^2}}{v}.$$

$$4. h = 0,1 \text{ м.}$$

Высшая лига

$$1. \text{ а) } I = 6,35 \text{ мкА;}$$

$$b) R^* = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad \epsilon^* = \frac{\epsilon R_2}{R_1 + R_2}; \quad \text{ в) } I = 0,5 \text{ мА.}$$

$$2. \text{ а) } H \approx 25,5 \text{ м, } \beta \approx 36,6^\circ;$$

$$b) v_b = \sqrt{gh}; \quad \text{ в) } y = C + \frac{u^2}{gH} \times$$

$$\times \left[\arcsin \sqrt{\frac{gH}{u^2}} (b-x) + \frac{gH \sqrt{(b-x) \left(b \left(\frac{u^2}{gH} - 1 \right) + x \right)}}{u^2} \right],$$

где C – постоянная.

$$3. \text{ д) } P = aT^4, \quad \sigma = \frac{3}{4} ac; \quad \text{ е) } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

$$4. \text{ а) } U_R = U - \Delta U e^{-t/(RC)}, \quad \text{ где } \Delta U = \frac{Ne}{C} = 7,61 \cdot 10^{-4} \text{ В;}$$

$$b) E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad \varphi(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \ln \frac{r}{R_a},$$

$$U_{\text{ир}} = E_{\text{ир}} R_a \ln \frac{R_k}{R_a} \approx 11 \text{ кВ}; \quad \text{ в) } n(r) = \frac{\pi\epsilon_0 \Gamma}{\mu\lambda} (r^2 - R_k^2).$$

Почем доллар?

(см. с.53)

$$24510 \times 28,2 = 691182; \quad 39865 \times 10,2 = 406623;$$

$$10265 \times 85,4 = 876631; \quad 83716 \times 3 = 251148;$$

$$82754 \times 2 = 165508 \text{ или } 67248 \times 2 = 134496;$$

минимальный коэффициент пересчета среди дробных чисел
равен 1,50: $73298 \times 1,5 = 109947$ или $92586 \times 1,5 = 138879$.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из
журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Редакция журнала «Квант»

kvantinfo

Московский центр непрерывного математического образова-
ния

kvant.mcsme.ru

Московский детский клуб «Компьютер»

math.child.ru

Костромской центр дополнительного образования «Эврика»
seemat.ru

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**А.А.Егоров, С.П.Коновалов,
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

НОМЕР ОФОРМИЛИ

**Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.А.Сумнина,
В.М.Хлебникова**

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ
на печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»;
тел.: 930-56-48;

e-mail: admin@kvant.info, math@kvant.info,
phys@kvant.info

Веб-сайт: www.kvant.info

Заказ № 10268

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099 Москва, Шубинский пер., 6.

При участии ЗАО «РИЦ «Техносфера»,
тел.: (095) 234-01-10

Шахматный вундеркинд №1

В «Кванте» (№ 5, 6 за 2002 год) рассказывалось о многих шахматных вундеркиндах. Безусловно, первым номером в этом ряду является американец Сэмюэль Решевский, многолетний претендент на шахматную корону. Решевский родился в 1911 году в небольшом польском городке Озерков и был шестым ребенком в семье. Его уникальные умственные способности проявились уже в двухлетнем возрасте, а играть в шахматы он научился в четыре года. Отец любил проводить долгие зимние вечера за доской. Поначалу интерес маленького Сэмми ограничивался беспорядочной перестановкой фигур. Но однажды, согласно легенде, Сэмми, увидев слабый ход отца, вмешался в игру и спас положение.

Через несколько месяцев малыш играл уже настолько хорошо, что в Озерков не находилось достойных партнеров. Семья переехала в Лодзь, и польский мастер Сальве был потрясен игрой вундеркинда. В 1917 году Сэмми отвезли в Варшаву, где его посещение шахматного клуба возбудило такой интерес, что сам Акиба Рубинштейн решил с ним сыграть. Мальчик проиграл, но после партии Рубинштейн воскликнул: «Когда-нибудь ты станешь чемпионом мира».

Решевский не посещал школу и никогда не видел книг с иллюстрациями. Поэтому во время проведенного с ним теста он почти ничего не узнавал на картинках, даже льва, обезьяну или тигра. Он знал, какой был день недели – среда, но не имел понятия о числе. Вместе с тем Сэмми легко решал головоломки, трудные и для детей 13 лет (т.е. вдвое старше его). Справился даже с такой, которую до него не смог решить ни один ребенок.

В 1920 году родители решили отправить сына в турне по столицам Европы, чтобы продемонстрировать его редкое умение.

Присзд мальчика в любой город собирал толпы, жаждавшие посмотреть на его игру. Свидетели утверждали, что наблюдать за малышом во время сеансов было жутковато. Игра вундеркинда, одетого в матросский костюмчик, казалась пронизанной демонической силой. Один за другим взрослые дяди сдавались с виноватой улыбкой. Детская непосредственность проявлялась лишь тогда, когда сеансер был вынужден капитулировать. В

такие моменты Сэмми мгновенно сметал на пол все оставшиеся на доске фигуры.

Вскоре семья перебралась из Польши в США. В октябре 1922 года – Сэмю еще не исполнилось 11 – он принял участие в своем первом турнире мастеров, где играли такие корифеи, как Осип Бернштейн, Давид Яновский и Эдуард Ласкер. Мальчик показал превосходную игру – например, Ласкеру пришлось выжимать выигрыш в течение 70 ходов. А победа над Яновским – один из самых ярких эпизодов в биографии юного Решевского. Он был так взволнован и счастлив, что по дороге домой в такси не мог спокойно сидеть – то и дело подпрыгивал и пел.

Яновский – Решевский

Нью-Йорк, 1922

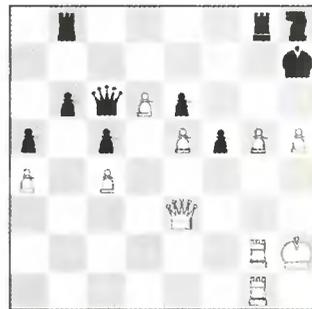
Ферзевый гамбит

1. d4 ♖f6 2. ♗f3 d5 3. c4 e6 4. ♖c3 ♗bd7 5. ♙g5 ♙e7 6. e3 c6. Чаще черные рокируют и лишь затем определяют стратегию, которой будут придерживаться в защите. 7. ♙d3 a6 8. 0-0 dc 9. ♙:c4 ♗b6? Более естественно b7–b5 с последующим c6–c5. 10. ♙d3 ♗fd5. 11. ♙:e7 ♗:e7 12. ♗d2. Сильнее 12. ♗e4 или 12. ♗c1.

12... ♙:c3 13. wc c5 14. ♗b1 ♗d7 15. a4 0-0 16. ♗c2 h6 17. ♗fe1 b6 18. ♗b2. У черных серьезные трудности. 18... ♗b8 19. ♗eb1 ♗d6 20. ♗e2 a5 21. ♙b5 ♗d8 22. h3 ♗c7 23. e4. Яновский начинает атаку на королевском фланге. 23... ♗f8 24. ♗e3 ♙d7 25. ♗e5 ♙e8 26. ♙:e8 ♗:e8 27. f4 f6. Создавая мишень, удобную для атаки противника, но терпя коня на e5 можно только иметь стальные нервы! 28. ♗f3 ♗d7 29. e5 f5. Без этого трудно обойтись, но теперь у белых есть зацепка для вскрытия игры на королевском фланге. 30. g4! g6 31. gf gf 32. d5! ♗f8 33. ♗g2+ ♗h7 34. c4 ♗f7 35. ♗h2 ♗g6 36. ♗bg1 ♗eg8 37. d6 ♗b7. Яновский ход за ходом усиливал позицию и сейчас форсированно выигрывает: 38. ♗g5+!! hg 39. ♗:g5 ♗g7 40. ♗g3! ♗f7 41. ♗h5+ ♗g8 42. ♗h6 ♗:e5 43. fe! ♗:g3 44. ♗:g3+ ♗g7 45. ♗:g7+ ♗:g7 46. ♗:e6 и т. д.

38. h4? ♗c6 39. h5? Шах конем снова приводил к победе, в то время как этот внешне опасный ход открывает черным дорогу к спасению. 39... ♗h8 40. ♗g5+ hg 41. fg

41... ♗g6!! Неожиданный ресурс. 42. ♗g3 ♗g7 43. ♗h3 ♗h8. Начиная борьбу за вертикаль «h», которая, в конечном счете, заканчивается в пользу черных. 44. hg ♗:h3+ 45. ♗:h3. Лучше 45. ♗:h3! ♗h8 46. ♗h6+! ♗g8!



47. g7 ♗h7 48. ♗g3 ♗:h6 49. gh ♗e4 50. d7, вынуждая ничью.

45... ♗h8+ 46. ♗g3 ♗:a4 47. ♗f3 f4+. Теперь все нити игры – в руках противника. 48. ♗g4 ♗c2 49. ♗:f4 ♗e2+ 50. ♗g3 ♗d3+ 51. ♗g2 ♗e2+ 52. ♗g3 ♗h2+ 53. ♗f3 ♗f8 54. ♗f6+! ♗g8! Сохраняет шансы на победу, а 54... ♗:f6+ 55. gf+ ♗g8 56. d7 ♗d2 57. g7! вело к ничьей ввиду угрозы f6–f7+.

55. d7 ♗:f6+ 56. gf? Только это – решающая ошибка. После 56. ef ♗d2 57. f7+ ♗g7 58. ♗h1! черные вынуждены удовлетвориться вечным шахом, так как 58... ♗:d7? 59. ♗h7+ ♗:g6 60. f8 ♗+ ведет к поражению.

56... ♗d2 57. ♗h1 ♗d3+! Но не 57... ♗:d7? 58. f7+ ♗g7 59. ♗h7+.

58. ♗g2 ♗:g6+. В этом все дело – пешка «d» тоже гибнет. 59. ♗f2 ♗f5+ 60. ♗g2 ♗g4+ 61. ♗h2 ♗e2+ 62. ♗h3 ♗d3+ 63. ♗h4 ♗:d7 64. ♗g1+ ♗f8 65. ♗g5 ♗d4. Белые сдались.

Карьера шахматного вундеркинда завершилась в 1924 году, когда был решен вопрос об образовании Сэмми. Из-за шахмат он за четыре года жизни в Америке научился лишь английскому – и больше ничему. Юноша решил изжить репутацию «чудо-ребенка». Так вышло, что в 12 лет Решевский впервые переступил порог школы.

В годы учебы Решевский почти не играл, лишь дал несколько сеансов. И в скором времени о мальшке в матросском костюмчике, устраивавшем когда-то веселые шахматные представления, почти забыли. Но мало кто знал истинную причину исчезновения юного Сэмми: он учился читать и писать!

В 1929 году Решевский поступил в университет Детройта на отделение бухгалтерского учета. И здесь мы вынуждены оборвать наш рассказ – Сэм перешагнул 18-летний рубеж...

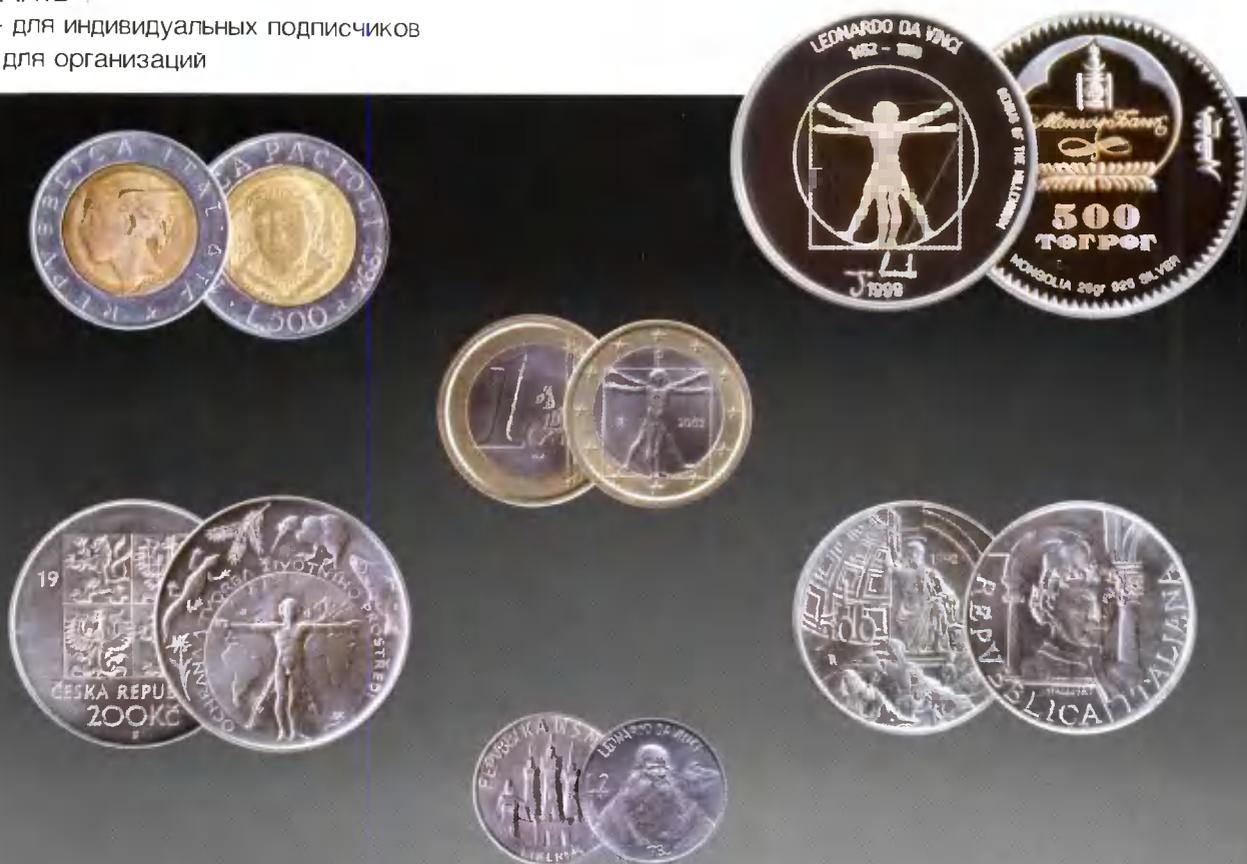
Е.Гук

Индексы по каталогу

"РОСПЕЧАТЬ":

70465 – для индивидуальных подписчиков

71514 – для организаций



ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ НА МОНЕТАХ МИРА

Блестящие представители итальянского Возрождения ПЬЕРО ДЕЛЛА ФРАНЧЕСКА (1420-1492), ЛУКА ПАЧОЛИ (1445-1514) и ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ (1452-1519) представлены не только на итальянских монетах, но и на денежных знаках Монголии, Сан-Марино и Чехии.

(Подробнее об этих ученых - внутри журнала.)

